



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Rouen Normandie

Analyse de Dynamiques d'Échanges Microscopiques et Macroscopiques pour l'Écologie et l'Épidémiologie

Présentée et soutenue par
Samuel Tréton

Thèse soutenue publiquement le 19 septembre 2024 devant le jury composé de

M. Grégoire NADIN	Université d'Orléans	Rapporteur
M. Philippe SOUPLÉ	Université Sorbonne Paris Nord	Rapporteur
M. Vincent CALVEZ	Université de Bretagne Atlantique	Examineur
M. Claudio LANDIM	Université de Rouen/IMPA	Examineur
Mme Sepideh MIRRAHIMI	Université de Montpellier	Examinatrice
Mme Magali RIBOT	Université d'Orléans	Examinatrice
M. Jean-Michel ROQUEJOFFRE	Université de Toulouse	Examineur
M. Matthieu ALFARO	Université de Rouen	Directeur

Thèse dirigée par Matthieu ALFARO, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem (LMRS)



Mathématiques, Information,
Ingénierie des Systèmes



Résumé

Cette thèse porte sur la dérivation et l'analyse de modèles de populations structurées en espace, de nature stochastique et déterministe. L'objectif principal de ce travail est d'améliorer notre compréhension des liens complexes entre les dynamiques individu-centrées et le comportement global des populations, ainsi que l'évolution en temps long de ces dernières. En mettant l'accent sur certains modèles présentant des dynamiques d'échanges entre milieux hétérogènes, on explore les relations entre certains systèmes de particules en interaction (processus d'exclusion simple) et les équations de réaction-diffusion. Une attention particulière est également portée à l'analyse du comportement en temps long des solutions de ces dernières, notamment aux critères de persistance ou d'extinction des populations.

On commence par introduire dans le Chapitre 1 les principaux fondements théoriques des équations de réaction-diffusion et des processus d'exclusion simple. Cette partie établit les prérequis essentiels pour les chapitres qui suivent.

Le Chapitre 2 est consacré à la dérivation microscopique, à partir d'un processus d'exclusion simple, d'un système de réaction-diffusion connu sous le nom de "champ-route", utilisé pour modéliser l'impact des lignes de diffusion rapide en écologie et épidémiologie.

Dans le Chapitre 3, on rend explicite les solutions du système champ-route diffusif original [22] et on en fournit un contrôle uniforme en temps long. Ce type de contrôle s'avère utile pour quantifier "l'intensité de dispersion" du processus diffusif et permet notamment de montrer des résultats de persistance et d'extinction lorsqu'une fonction de croissance avec effet Allee est introduite.

Enfin, le Chapitre 4 concerne des résultats de type Fujita sur l'explosion en temps fini, par opposition à la possible existence globale des solutions, d'un système de réaction-diffusion sur-linéaire "échangeur de chaleur". Cette étude permet de caractériser la stabilité de l'équilibre nul lorsqu'on ajoute une réaction monostable dégénérée en 0, pénalisant la croissance des faibles densités. Ce point représente la clé de voûte de la caractérisation des phénomènes de persistance et d'extinction mentionnés plus haut.

Mots clés : écologie, épidémiologie, diffusion, modèle champ-route, persistance et extinction de populations, transitions microscopique-macroscopique, limites d'échelles hydrodynamiques, processus d'exclusion simple, équations de réaction-diffusion, phénomènes d'explosion de type Fujita.

Abstract

This thesis deals with the derivation and the analysis of spatially structured population models, including both stochastic and deterministic approaches. The main goal of this work is to deepen our understanding of the intricate connections between individual-based dynamics and the collective behavior of populations, as well as the long-term behavior of the latter. By focusing on models that illustrate exchanges between heterogeneous environments, we particularly investigate the relationships between certain interacting particle systems (simple exclusion processes) and reaction-diffusion equations. Special attention is also given to the long-term behavior of the solutions of these equations, especially the criteria for population persistence or extinction.

Chapter 1 lays the theoretical background for reaction-diffusion equations and simple exclusion processes. This section provides the necessary foundation for the following chapters.

Chapter 2 explores the microscopic derivation, *via* a simple exclusion process, of a reaction-diffusion system known as the “field-road model”, which is used to model the impact of fast diffusion channels in ecology and epidemiology.

In Chapter 3, we explicitly derive the solutions of the original field-road diffusion model [22] and provide a uniform long-term control. Such control is useful to quantify the “dispersion intensity” of the diffusive process, enabling to demonstrate results related to persistence and extinction when a growth function with an Allee effect is introduced.

Finally, Chapter 4 examines Fujita-type results concerning blow-up *versus* possible global existence of solutions to a superlinear reaction-diffusion “heat exchanger” system. This study characterizes the stability of the zero equilibrium when a monostable reaction degenerate at 0 (penalizing low-density growth) is included. This aspect is crucial for understanding the persistence and extinction phenomena mentioned above.

Keywords: ecology, epidemiology, diffusion, field-road model, persistence and extinction of populations, microscopic-macroscopic transitions, hydrodynamic scaling limits, simple exclusion processes, reaction-diffusion equations, Fujita-type blow-up phenomena.

Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à l'excellent chercheur et enseignant Matthieu Alfaro, qui a su diriger ma thèse avec une remarquable efficacité autant sur le plan logistique que mathématique. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour le savoir et les valeurs qu'il m'a transmis, mais aussi pour m'avoir propulsé sans réserve dans le monde de la recherche comme il l'a fait. Je tire une grande satisfaction du chemin que nous avons parcouru ensemble, et espère vivement avoir le plaisir de poursuivre cette collaboration.

Je tiens à remercier Grégoire Nadin et Philippe Souplet pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je suis particulièrement honoré de bénéficier de leur expertise et leur adresse ma sincère reconnaissance pour avoir pris le temps de relire ce manuscrit.

Je remercie également Vincent Calvez, Claudio Landim, Sepideh Mirrahimi, Magali Ribot, et Jean-Michel Roquejoffre de bien vouloir faire partie de mon jury de soutenance, et leur exprime ma gratitude pour leur disponibilité.

Je salue à présent Romain Ducasse et Mustapha Mourragui, dont la contribution a été essentielle dans l'accomplissement des travaux de cette thèse. Je tiens particulièrement à remercier Romain pour les nombreux échanges que nous avons eus sur les modèles SIR, et pour les ressources qu'il a mobilisées pour m'inviter au Laboratoire Jacques-Louis Lions. J'adresse aussi ma reconnaissance à Mustapha, pour avoir brillamment assuré mon initiation aux systèmes de particules en interaction.

Je remercie aussi Cécile Carrère, Jean-Baptiste Burie et Grégory Faye pour m'avoir donné l'occasion de présenter mes travaux dans leurs laboratoires respectifs et pour les discussions particulièrement enrichissantes que j'ai pu avoir avec eux. Je remercie également Thomas Lepoutre pour l'échange que nous avons eu devant les tableaux du CIRM cet été et qui a permis de débloquer un certain nombre de choses...

J'adresse un grand merci à tous les chercheurs (actuels et anciens) de l'équipe du Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre, notamment, Arnaud Ducrot, Quentin Griette, Hao Kang, Kamal Khalil, Valentina Lanza, Pierre Lefebvre, David Manceau, Ahmadou Sylla, et Alexandre Thorel, pour leur accueil et leur bienveillance.

Je tiens également à remercier Grégory Faye, François Hamel et Jean-Michel Roquejoffre, et suis optimiste quant à la perspective de collaborer avec eux dans un avenir proche.

Je remercie chaleureusement Henri Berestycki, Jean-Michel Roquejoffre et Luca Rossi pour avoir imaginé et développé le modèle champ-route qui m'a permis de rencontrer de fabuleuses personnes. J'en profite pour saluer tous mes confrères et consœurs du champ-route, en particulier, Elisa Affili, Romain Ducasse et Mingmin Zhang.

J'adresse aussi ma gratitude à mes frères de thèse, notamment Nessim Dhaouadi, Quentin Griette et Gwenaël Peltier pour leur sympathie et les discussions que j'ai pu mener avec eux. Je remercie aussi Nessim pour m'avoir supporté comme cobureau pendant plus de deux ans, pour son excellent café et pour les bons moments de rigolade qu'on a eu ensemble !

Je salue par la même occasion tous mes cobureaux de ces trois dernières années, Thomas Gkelsinis, Ronald Manríquez (j'espère que ça va bien au Chili !) et Roman Tenzin.

Je remercie à présent mes chers amis Audrey Chaudron et Léopold Revel qui ont apporté énormément de joie et de bonne humeur tout au long de ma thèse. Je leur souhaite la meilleure des réussites dans le monde de la recherche. Merci pour les innombrables cafés !

Les trois années de ma thèse se sont déroulées au Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble des collègues qui y travaillent (ou y ont travaillé) pour faire de ce lieu un cadre idéal pour la recherche et l'enseignement. Ainsi, je remercie chaleureusement Patrizia Donato pour la sagesse et les enseignements qu'elle m'a inculqués, Adel Blouza pour l'accessibilité de ses enseignements, mais aussi pour sa grande valeur en tant que directeur du département et Ionut Danaila pour sa direction du laboratoire et pour la machine à café (sans laquelle Claudio Landim ne serait peut-être pas dans mon jury !).

Je remercie aussi l'ensemble des collègues avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner : Caroline Brérard, Nicolas Vergne, Jean-Yves Brua et Antoine Channarond pour l'équipe de stat, mais aussi Jean-Baptiste Bardet, Léo Glangetas et Olivier Guibé.

J'adresse également ma gratitude à tous les thésards (actuels et anciens) du laboratoire, mais aussi à tous ceux de l'INSA de l'autre côté de la route ! Je remercie en particulier Mirella Aoun, Séverin Benzoni, Angèle Bouley, Silvio Bove, Adrien Ceccaldi, Audrey Chaudron, Nessim Dhaouadi, Rheadel Fulgencio, Thomas Gkelsinis, Victor Kalt, Augustin Leclerc, Cécile Legrand, Bahae-Eddine Madir, Ronald Manríquez, Anas Ouknine, Nicolas Prévost, Averil Prost, Gauthier Quilan, Cyril Tain et Roman Tenzin pour leur sympathie et leur bonne humeur.

Je tiens aussi à remercier Anouar Meynaoui et Rheadel Fulgencio pour les bons moments passés avec eux pendant mon stage de master durant l'été 2021. J'espère vivement que nos chemins se recroiseront bientôt !

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui assurent (ou ont assuré) le bon fonctionnement du laboratoire, à savoir Edwige Auvray, Carole Duboc et Hamed Smail, mais aussi les redoutables informaticiens Saada Benamar et Corentin Lothodé qui m'ont plus d'une fois donné *la* bonne commande à taper.

Je remercie aussi toutes les personnes du laboratoire (mais aussi les stagiaires !) avec qui j'ai pu interagir scientifiquement. Je pense notamment à Elisa Affili, Angèle Bouley, Liam Buisson, Audrey Chaudron, Nessim Dhaouadi, Francky Luddens, Nicolas Prévost et Léopold Revel.

J'adresse un grand merci à Cyril Tain et Averil Prost qui ont su relancer avec dynamisme notre atelier des doctorants entre l'INSA et l'université qui s'était éteint pendant la crise de la COVID.

Je tiens également à remercier Gaëlle Chagny et Thierry De La Rue pour leurs efforts de vulgarisation des mathématiques pour le grand public, notamment pour l'organisation de la fête de la science, mais aussi pour leurs interventions dans les classes d'écoles primaires.

J'adresse un grand merci à tout le personnel du service technique de l'UFR qui ont littéralement éclairé la recherche du bureau M.1.05. C'est également à eux (et à Adel !) que l'on doit cet énorme tableau à craie qui fait toute la vie de ce bureau.

Je remercie encore Vincent Calvez pour m'offrir cette incroyable opportunité de venir travailler deux années à Brest — j'ai hâte de commencer !

Je souhaiterais dédier cette thèse à mes parents, sans qui ce travail n'aurait pas été possible. Maman, papa, merci pour votre soutien et votre amour inconditionnel tout au long de ces années. Merci pour tous ces merveilleux moments passés avec vous ! Merci pour tout !

Je remercie profondément tous les membres de ma famille, Amélie, Nanou, mes cousines, mes grands parents, mes oncles, Valérie (merci pour la relecture !) et Hicham. Merci d'être et d'avoir été là ! Je vous aime tous !

Mes dernières pensées vont enfin vers Myriam, dont la présence illumine ma vie et donne du sens à tout ce que je fais aujourd'hui.

Sommaire

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
1 Introduction	1
1.1 Contexte et motivations	2
1.1.1 Le mouvement brownien aux origines de la diffusion	2
1.1.2 L'équation de la chaleur à partir de marches aléatoires	5
1.1.3 Processus d'Exclusion Simple Symétriques	8
1.1.4 Influence de la frontière dans les équations de diffusion posées en demi-espace	26
1.1.5 Naissances et morts : quelques modèles EDO	34
1.1.6 Équations de réaction-diffusion : cadre général	38
1.1.7 Équation de Fisher-KPP	40
1.1.8 Effet Allee faible et phénomènes d'explosion de Fujita	47
1.2 Contributions de la thèse	54
1.2.1 Résumé du Chapitre 2 : Un système champ-route microscopique	54
1.2.2 Résumé du Chapitre 3 : Dérivation explicite des solutions du système champ-route diffusif	58
1.2.3 Résumé du Chapitre 4 : Résultats de type Fujita sur un système couplé par la diffusion	62
1.3 Perspectives	67
1.3.1 Propagation de connaissance <i>via</i> une dynamique SIR	67
1.3.2 Réaction-diffusion en demi-espace en présence d'un piston	74
1.3.3 Exclusion simple pour des opérateurs de diffusion fractionnaires	79
2 An Interacting Particle System towards the Field-Road Model	85
2.1 Introduction	86
2.1.1 The field-road model for fast diffusion channels	86
2.1.2 Interacting Particle Systems and Simple Exclusion Processes	88

2.2	Notations and main result	89
2.2.1	Sets and related notations	89
2.2.2	Description of the microscopic model	90
2.2.3	Functional spaces and macroscopic equations	93
2.2.4	Main Results	95
2.2.5	The steps to prove Theorem 2.4 and organisation of the paper.	97
2.3	Martingales and tightness.	98
2.3.1	Martingales	98
2.3.2	Tightness	100
2.4	Characterization of the limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$	102
2.4.1	The limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ load paths with density	102
2.4.2	The limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ load paths whose densities satisfy (W1)	103
2.4.3	Replacement lemmas	104
2.4.4	The limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ load paths whose densities satisfy (W2)	105
2.5	Uniqueness of the solution	109
2.A	Appendix	110
2.A.1	Some tools and basic estimates	110
2.A.2	Proof of the upper Replacement lemma	116
2.A.3	Proof of the energy estimate	121
	Table of notations.	125
3	The Field-Road Diffusion Model	129
3.1	Introduction.	130
3.2	Main results.	131
3.3	The Heat equation in the half-space	135
3.4	The solution to the field-road model Cauchy problem.	140
3.5	The decay rate of the field-road model	145
3.6	Numerical explorations	152
3.A	Appendix	156
3.A.1	The complementary error function <i>Erfc</i>	156
3.A.2	The polynomials P_δ	157
3.A.3	Fourier, Laplace and Fourier/Laplace transforms	160
4	A Fujita-type Heat Exchanger System	163
4.1	Introduction.	164
4.2	Notations and main results	167
4.2.1	The linear problem (4.6)	167
4.2.2	The semi-linear problem (4.1)	170
4.3	Asymptotic behavior of the Heat exchanger system.	174
4.4	Possible global existence.	179
4.5	Systematic blow-up	181
	Bibliography	189

CHAPTER 1

Introduction

Cette thèse vise à explorer et résoudre certains problèmes liés à l'étude des équations de réaction-diffusion et des systèmes de particules en interaction. En s'appuyant notamment sur une analyse des dynamiques d'échange entre milieux hétérogènes, ce travail s'inscrit à l'interface des équations aux dérivées partielles, des probabilités et de la biologie. Cette démarche reflète la tendance contemporaine et croissante à mobiliser des outils mathématiques avancés pour modéliser et comprendre les phénomènes propres aux systèmes biologiques. En se concentrant sur des modèles de populations structurées en espace, tant microscopiques (stochastiques) que macroscopiques (déterministes), ce document espère fournir de nouvelles perspectives et méthodologies permettant d'étudier les dynamiques individuelles et collectives au sein d'un groupe. Cette approche est cruciale pour progresser dans la compréhension des mécanismes fondamentaux qui régissent des domaines appliqués tels que l'écologie, la préservation de la biodiversité, la gestion des ressources naturelles ou encore la santé publique.

Sommaire du chapitre

1.1 Contexte et motivations.....	2
1.2 Contributions de la thèse	54
1.3 Perspectives	67

1.1 Contexte et motivations

1.1.1 Le mouvement brownien aux origines de la diffusion

Un élément-clé autour duquel s’articule le présent travail est le phénomène diffusif associé, dans un cadre assez large, à l’éparpillement d’une concentration ou d’un groupe d’individus dans un milieu donné. L’étude de tels processus évolutifs, fondamentaux dans des disciplines variées telles que la biologie, l’écologie ou l’épidémiologie, trouve son origine dans les observations minutieuses du botaniste écossais Robert Brown en 1827. Lors d’une expérience devenue fondatrice, alors qu’il examinait au microscope des grains de pollen immergés dans l’eau, Brown remarqua la présence de minuscules particules en suspension aux mouvements erratiques. Intrigué par ces trajectoires désordonnées, zigzagantes et apparemment aléatoires, Brown les attribua dans un premier temps à l’expression d’une certaine “force vitale”. C’est toutefois en élargissant ses observations à des particules tant de provenance organique qu’inorganique, qu’il découvrit que ce phénomène était en réalité universel à partir du moment où les particules étaient broyées assez finement, remettant en cause l’idée d’un phénomène intrinsèquement lié à la vitalité des particules observées. Ce comportement aléatoire et imprévisible a, par la suite, été désigné sous le nom de “mouvement brownien”, en l’honneur des contributions pionnières de Brown qui fut parmi les premiers à le décrire.

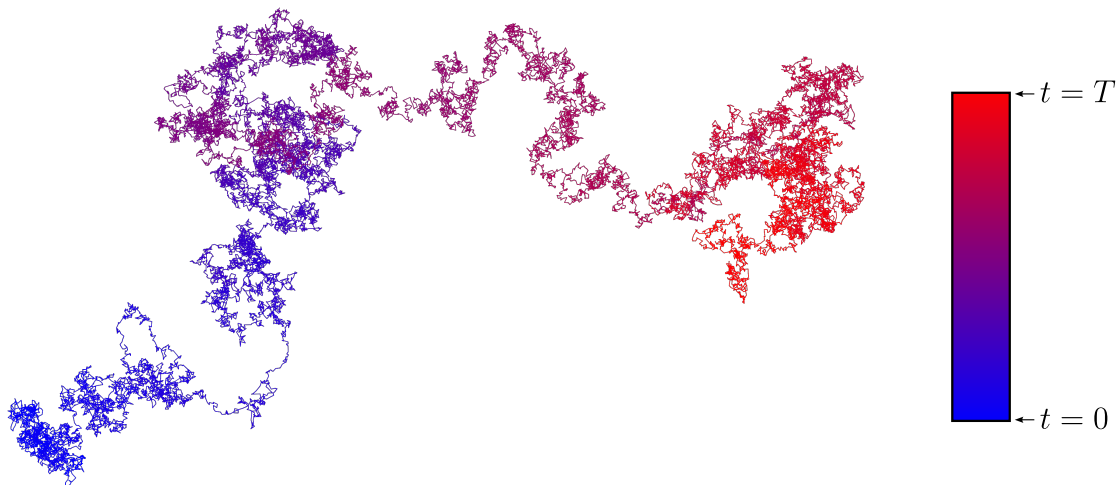


Figure 1 — Illustration d’une trajectoire de particule telle que typiquement observée par Robert Brown en 1827.

Poursuivant les travaux de Robert Brown et cherchant à comprendre plus en profondeur les principes sous-jacents au désordre des mouvements observés, Albert Einstein apporta, en 1905, une perspective novatrice sur le phénomène, posant les bases de ce qui allait devenir notre compréhension moderne du mouvement brownien. Dans ses travaux, Einstein développa une théorie permettant de décrire quantitativement le mouvement brownien,

affirmant que les mouvements erratiques des particules pouvaient s'expliquer par leurs collisions incessantes avec les molécules du fluide dans lequel elles plongeaient. Einstein affina ensuite cette idée en réalisant une étude statistique pour décrire la position d'une particule à un instant t donné. Il découvrit que cette position suivait une distribution gaussienne isotrope, dont l'écart-type croissait proportionnellement à \sqrt{t} . Cette description du mouvement brownien ne se contente pas seulement d'expliquer comment les particules se dispersent, mais permet aussi d'estimer certaines de leurs propriétés — comme leur taille — en se basant sur l'analyse de leur mouvement. Cette avancée facilita par la suite la compréhension des dynamiques microscopiques, instaurant un cadre solide pour d'autres investigations autour du phénomène, tant en physique qu'en mathématiques.

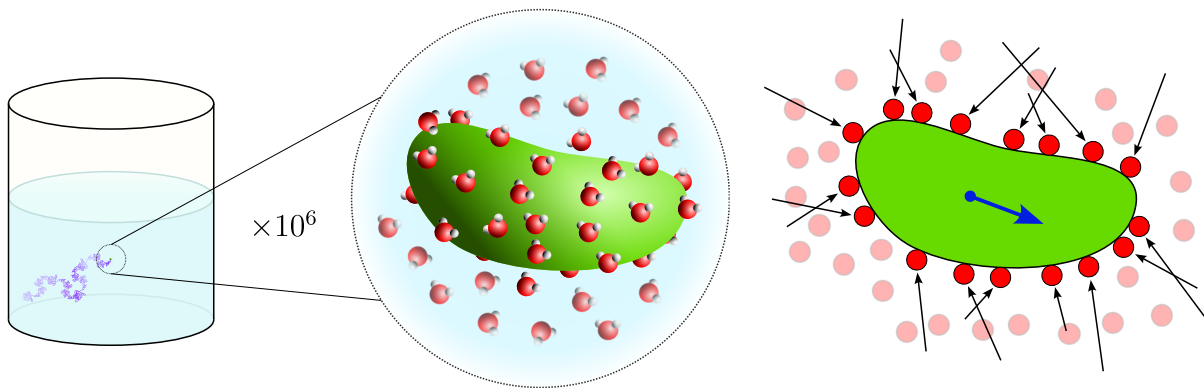




Figure 2 — Illustration de l'explication du mouvement brownien apportée par Albert Einstein en 1905. La particule représentée en vert () plonge dans l'eau dont les molécules sont représentées en rouge (). Soumises à l'agitation thermique, ces dernières sont en permanence en mouvement et appliquent des forces aléatoires sur la particule lorsqu'elles entrent en collision avec elle. Ces forces sont représentées par les flèches noires sur la partie la plus à droite de la figure et leur somme résulte en la force globale appliquée sur la particule représentée par la flèche bleue.

Jean Perrin, inspiré par les idées d'Einstein, entreprit de valider expérimentalement sa théorie. En 1909, il mena une série d'expériences minutieuses qui lui permirent de mesurer le nombre d'Avogadro, confirmant brillamment les prédictions d'Einstein. Les travaux de Perrin, couronnés par le prix Nobel en 1926, ne se contentèrent pas de confirmer la théorie : ils fournirent également une description détaillée des trajectoires extrêmement irrégulières des particules en suspension — trajectoires si complexes qu'elles apparaissaient dépourvues de tangente en tout point. C'est dans ce contexte que Jean Perrin souligna la proximité entre les observations expérimentales du mouvement brownien et certaines fonctions mathématiques continues, mais non dérivables, jusqu'alors considérées par beaucoup comme de simples anomalies sans grand intérêt — et parfois même avec une certaine aversion. Perrin mit ainsi en avant l'intérêt pratique et physique de ces fonctions, qui allaient désormais incarner une représentation mathématique de ces trajectoires chaotiques observées dans la nature.

“Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n’ont pas de dérivées.”

— Charles Hermite (1893) [90]

“On ne peut non plus fixer une tangente, même de façon approchée, à aucun point de la trajectoire, et c’est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l’on regarderait à tort comme des curiosités mathématiques, puisque la nature les suggère aussi bien que les fonctions à dérivées.”

— Jean Perrin (1913) [120]

Cette remarque de Perrin marqua un tournant, illustrant comment certains concepts d’apparence purement théorique pouvaient trouver des applications concrètes dans la compréhension des phénomènes naturels.

Outre les avancées de Perrin, le mouvement brownien captiva l’esprit de figures emblématiques du monde scientifique du 20^{ème} siècle. Paul Langevin, par exemple, introduisit une vision dynamique qui renouvela l’approche du mouvement brownien, tandis que Norbert Wiener en proposa une formalisation mathématique précise, donnant naissance au concept désormais connu sous le nom de processus de Wiener. Ces contributions, parmi tant d’autres dans les sphères de la physique et des mathématiques, ont non seulement consolidé les fondations de la théorie du mouvement brownien, mais ont également permis de développer cette théorie de manière significative par rapport à ses premières conceptions.

C’est dans cette riche tradition de recherche interdisciplinaire que s’inscrit le travail de Monroe David Donsker, qui apporta une perspective novatrice sur la question, établissant un lien formel entre certaines marches aléatoires et le mouvement brownien. La méthode constructive introduite par Donsker en 1951 commence par considérer une suite de variables aléatoires réelles $(U_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées représentant l’amplitude des pas de la marche aléatoire. En interpolant linéairement les points de cette suite de sorte à créer un processus à temps continu, Donsker démontra¹ qu’il était possible de faire converger ce processus vers le mouvement brownien si l’on procédait à une limite d’échelle spatio-temporelle adéquate. Plus précisément, son résultat est le suivant.

Théorème 1.1 (Donsker, 1951) *Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées, de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Notons, pour $n \geq 0$,*

$$S_n := \begin{cases} \sum_{k=1}^n U_k & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Alors la suite de processus à temps continu $((B_N(t))_{t \geq 0})_{N \geq 1}$ définie par

¹Voir [58] ou encore [28, Section 8, page 86].

1.1. Contexte et motivations

$$B_N(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \left(S_{\lfloor Nt \rfloor} + (Nt - \lfloor Nt \rfloor)U_{\lceil Nt \rceil} \right), \quad (1.1)$$

où $\lfloor Nt \rfloor$ (resp. $\lceil Nt \rceil$) désigne la partie entière inférieure (resp. supérieure) de Nt , converge en loi, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers un mouvement brownien.

Il convient, dans (1.1), d’imaginer le processus $(B_N(t))_{t \geq 0}$ comme l’interpolation linéaire de l’ensemble des points de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ placés dans un repère (n, S_n) dont la direction verticale est comprimée par un facteur $1/\sqrt{N}$, et la direction horizontale par un facteur $1/N$. La raison de cette échelle “pas d’espace = $\sqrt{\text{pas de temps}}$ ” sera discutée plus en détails dans la sous-section 1.1.2.

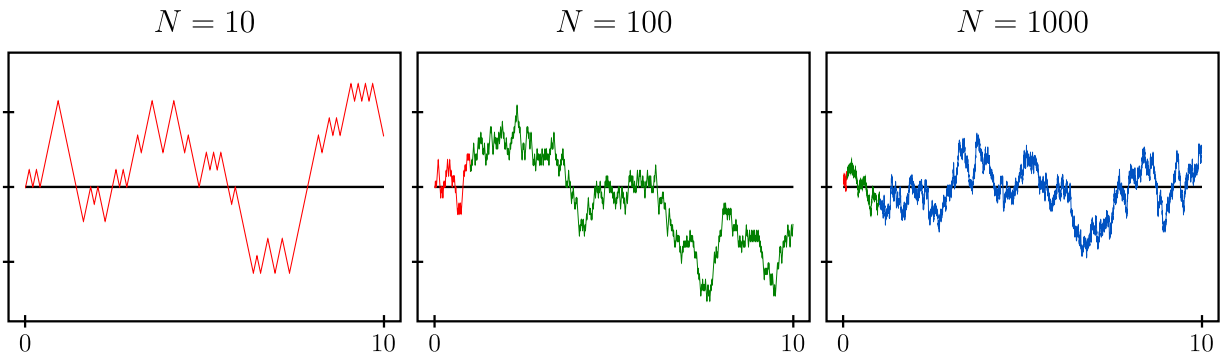


Figure 3 — Approximation d’un mouvement brownien sur l’intervalle de temps $[0, 10]$ suivant la méthode de construction de Donsker — voir le Théorème 1.1. Dans cet exemple, les variables aléatoires $(U_n)_{n \geq 1}$ utilisées pour les sauts suivent une loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$. Les trois graphiques sont représentés à la même échelle spatio-temporelle.

1.1.2 L’équation de la chaleur à partir de marches aléatoires

On se propose ici d’établir un premier lien entre certaines marches aléatoires sur la droite réelle et l’incontournable équation de la chaleur. Cette approche représente un point de départ primordial pour comprendre les enjeux des équations de diffusion, notamment dans un cadre de dynamique des populations.

Étant donné deux réels positifs δ_x et δ_t , considérons un individu vivant sur le réseau $\delta_x \mathbb{Z} := \{z\delta_x \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Partant de l’origine au temps initial, l’individu évolue sur le réseau en sautant, à tous les temps discrets $n\delta_t$ ($n \in \mathbb{N}^*$), sur un de ces deux sites adjacents — disons, pour fixer les idées, avec probabilité $\alpha \in (0, 1)$ vers la droite et $1 - \alpha$ vers la gauche.

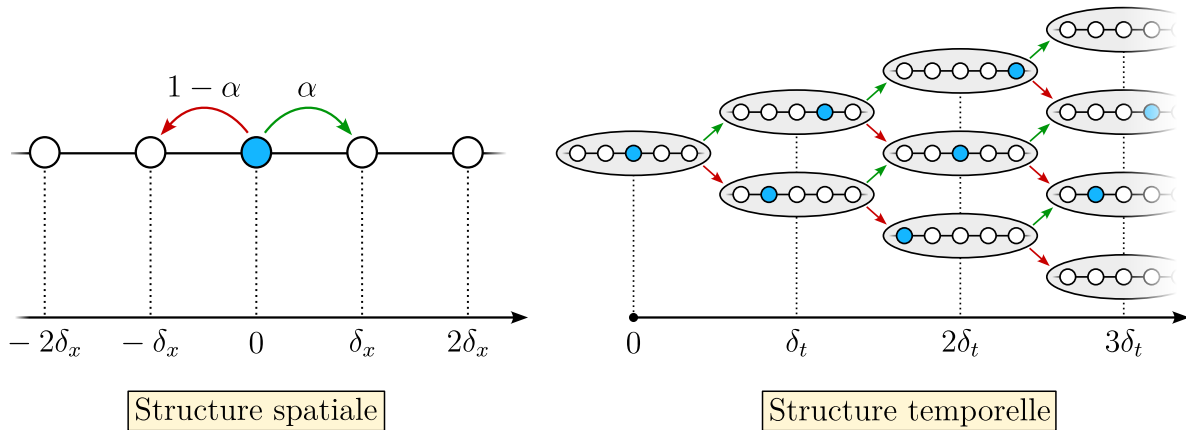


Figure 4 — Schéma de la marche aléatoire servant de base pour la dérivation de l'équation de la chaleur. Partant de l'origine au temps initial, l'individu représenté par ● saute à tous les temps discrets sur le site se situant à sa droite avec probabilité α et sur le site se situant à sa gauche avec probabilité $1 - \alpha$.

En notant $u(t, x)$ la probabilité que l'individu se trouve au site $x \in \delta_x \mathbb{Z}$ à l'instant $t \in \delta_t \mathbb{N}$, on peut voir que la probabilité d'être en un site au temps discret suivant s'écrit comme une combinaison convexe des probabilités d'être en les sites voisins au temps présent :

$$u(t + \delta_t, x) = \alpha u(t, x - \delta_x) + (1 - \alpha) u(t, x + \delta_x). \quad (1.2)$$

Avec l'intention de distinguer la partie symétrique de la partie anti-symétrique de la dynamique, on introduit ici le biais $b := \alpha - 1/2$, de sorte que

$$\alpha = \frac{1}{2} + b \quad \text{et} \quad 1 - \alpha = \frac{1}{2} - b.$$

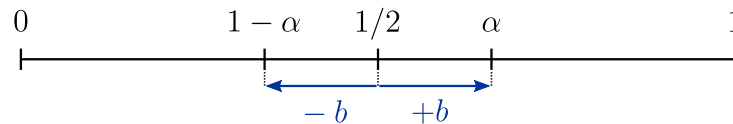


Figure 5 — Positionnement des probabilités de saut sur le segment $(0, 1)$.

L'égalité (1.2) devient alors

$$u(t + \delta_t, x) = \frac{1}{2} [u(t, x - \delta_x) + u(t, x + \delta_x)] - b [u(t, x - \delta_x) - u(t, x + \delta_x)], \quad (1.3)$$

qu'il est possible de reformuler

$$\frac{u(t + \delta_t, x) - u(t, x)}{\delta_t} = \frac{\delta_x^2}{2\delta_t} \frac{u(t, x - \delta_x) - 2u(t, x) + u(t, x + \delta_x)}{\delta_x^2} \quad (1.4)$$

$$- \frac{2b\delta_x}{\delta_t} \frac{u(t, x - \delta_x) - u(t, x + \delta_x)}{2\delta_x}. \quad (1.5)$$

1.1. Contexte et motivations

On voit alors apparaître les approximations discrètes de $\partial_t u$ et $\partial_{xx} u$ dans (1.4), et celle de $\partial_x u$ dans (1.5), qui vont effectivement se manifester lorsqu'on enverra les pas d'espaces et de temps discrets δ_x et δ_t vers 0. Ceci étant dit, certaines précautions sont à prendre avant de passer à la limite. En effet, nous devons nous assurer que les quantités $\delta_x^2/2\delta_t$ et $2b\delta_x/\delta_t$ convergent correctement. Cette contrainte va, de manière inévitable, lier l'espace et le temps dans une certaine échelle, qui, si elle n'est pas respectée peut

- figer la dynamique asymptotique (si δ_x tend vers 0 trop vite par rapport à δ_t),

ou bien

- faire exploser la variance de la dynamique asymptotique² (si δ_x tend vers 0 trop lentement par rapport à δ_t).

En annulant le biais b dans une première approche (ce qui correspond à prendre $\alpha = 1/2$), (1.4)-(1.5) se réduit à (1.4), si bien qu'en préservant le ratio (dit *parabolique*)

$$\frac{\delta_x^2}{2\delta_t} = d, \quad (1.6)$$

le passage à la limite $\delta_x, \delta_t \rightarrow 0$ dans (1.4) produit l'équation de la chaleur pour la densité de probabilité u :

$$\partial_t u = d\partial_{xx} u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Prenons maintenant un biais b non nul. Dans ce cas, (1.4)-(1.5) est à considérer dans son entièreté. Un premier cas de figure serait de considérer la limite d'échelle dans le ratio (dit *hyperbolique*)

$$\frac{2b\delta_x}{\delta_t} = c, \quad (1.8)$$

produisant, à la limite $\delta_x, \delta_t \rightarrow 0$ dans (1.4), l'équation de transport pour la densité de probabilité u :

$$\partial_t u = -c\partial_x u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Notons, dans (1.9), la disparition de la contribution diffusive apportée par le Laplacien ∂_{xx} , étant due au fait que $\delta_x^2/2\delta_t \sim c\delta_x/4b \rightarrow 0$ dans le régime hyperbolique (1.8). Avec la volonté de faire apparaître de la diffusion dans l'équation limite de u , on peut alors être tenté de choisir le régime parabolique (1.6) pour faire converger le membre de droite de (1.4) vers $d\partial_{xx} u$. Cela est cependant impossible car, ce faisant, on perd le contrôle de $2b\delta_x/\delta_t \sim 4db/\delta_x \rightarrow \infty$. Nous sommes ainsi amenés à la conclusion suivante :

La dynamique microscopique utilisée ici n'est pas assez riche pour reproduire de manière simultanée la diffusion et l'advection à l'échelle macroscopique.

²Si $X(t)$ représente la position de l'individu au temps $t = n\delta_t$, alors la variance de $X(t)$ est donnée, dans le cas simple où $\alpha = 1/2$, par $\text{Var}(X(t)) = t\delta_x^2/\delta_t$. On peut d'ores et déjà remarquer la ressemblance entre $X(t)$ et le mouvement brownien dont la variance est proportionnelle au temps — voir le paragraphe sur les travaux d'Einstein dans la sous-section 1.1.1.

Cette conclusion n'est en réalité pas aussi définitive qu'elle n'y paraît. En effet, il est possible, dans ce cas précis, d'adapter légèrement la dynamique microscopique pour faire cohabiter le Laplacien ∂_{xx} et le gradient ∂_x dans l'équation macroscopique. Pour y parvenir, on doit convenablement faire disparaître le biais b (devenant à présent $b(\delta_x)$) lors du passage à la limite $\delta_x \rightarrow 0$. Plus précisément, il suffit se placer dans le ratio parabolique (1.6), et de prendre

$$b = \frac{c\delta_x}{4d} \rightarrow 0,$$

pour retrouver l'équation d'advection-diffusion

$$\partial_t u = d\partial_{xx}u - c\partial_x u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

pour la densité de probabilité u .

Cet exemple simple met en lumière toute la subtilité des différentes limites d'échelles qui peuvent apparaître lors de la dérivation microscopique de certaines équations déterministes complexes³. Cette constatation souligne le fait que la transition du microscopique au macroscopique n'est finalement pas triviale et nécessite un certain nombre de précautions. Dans la sous-section qui suit, nous abordons une autre méthode de dérivation de tels modèles macroscopiques reposant sur les systèmes de particules en interaction.

1.1.3 Processus d'Exclusion Simple Symétriques

Les systèmes de particules, au sein desquels s'inscrivent les Processus d'Exclusion Simple Symétriques⁴, constituent un vaste champ de recherche des mathématiques appliquées. Leur étude consiste à explorer le comportement asymptotique de dynamiques collectives de particules soumises à des contraintes d'évolution et d'interactions mutuelles. Initialement introduits vers le début des années soixante-dix dans des travaux pionniers tels que ceux de Frank Spitzer [136], [84], ces modèles fascinent par leur capacité à modéliser des phénomènes complexes à travers des règles simples, offrant une représentation à l'échelle macroscopique de divers systèmes physiques, biologiques ou encore épidémiologiques.

La famille des Processus d'Exclusion Simple se distingue de par sa règle fondamentale "d'exclusion" qui consiste à empêcher systématiquement l'occupation simultanée d'un même site par plusieurs particules. Cette règle s'avère être assez confortable dans la pratique puisqu'elle prévient de l'accumulation de particules en un même site, ce qui pourrait provoquer l'explosion par concentration de la densité à l'échelle macroscopique.

L'essentiel de cette sous-section est dédiée à la dérivation complète de l'équation de la chaleur sur le tore uni-dimensionnel $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dont le problème de Cauchy s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx}u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}) \cap [0, 1]^{\mathbb{T}}, & x \in \mathbb{T}, \end{cases} \quad (1.11)$$

³Au sens où les opérateurs intervenant dans leur évolution sont de différentes natures (Laplacien *vs.* gradient dans l'exemple précédent).

⁴Symmetric Simple Exclusion Processes (SSEP) en anglais.

et constitue un point de départ crucial pour entrer dans la matière.

On peut, dans un premier temps, être surpris par l'ensemble $L^\infty(\mathbb{T}) \cap [0, 1]^\mathbb{T}$ où vit la donnée initiale u_0 . Nous verrons par la suite que cette réclamation d'encadrer notre donnée entre 0 et 1 au sens large est, en fait, une contrainte qui émerge de la règle d'exclusion empêchant la superposition de particules sur les sites. Ceci n'est pas restrictif dans le cas présent, compte tenu de la linéarité du problème (1.11).

L'essentiel du contenu discuté dans cette partie s'inspire profondément du livre de Kipnis et Landim [93], mais aussi de la contribution de Baldasso, Menezes, Neumann et Souza [15], ainsi que celle de Mourragui, Saada et Velasco [111].

Notations, espaces et configurations Étant donné un entier $N \geq 1$, on se place sur le réseau microscopique $\mathbb{T}_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Les éléments de \mathbb{T}_N sont appelés *sites* et sont dénotés par i et j . En appliquant une remise à l'échelle en $1/N$ on ramène l'espace microscopique \mathbb{T}_N à l'espace macroscopique $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (qui est essentiellement l'intervalle $(0, 1)$ que l'on a rendu périodique en le refermant sur lui-même), dont les éléments sont désignés par x et y .

On appelle *état* toute fonction $\eta : \mathbb{T}_N \rightarrow \{0, 1\}$ pouvant être vu comme une suite de 0 et de 1 de longueur N , indiquant de façon binaire la présence ou l'absence de particule en un site donné : pour tout $i \in \mathbb{T}_N$,

- $\eta(i) = 1$ signifie que le site i est occupé par une particule,
- $\eta(i) = 0$ signifie que le site i est vacant.

Enfin, on note $S_N := \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N} = \{\eta : \mathbb{T}_N \rightarrow \{0, 1\}\}$ l'ensemble des états possibles sur le système microscopique.

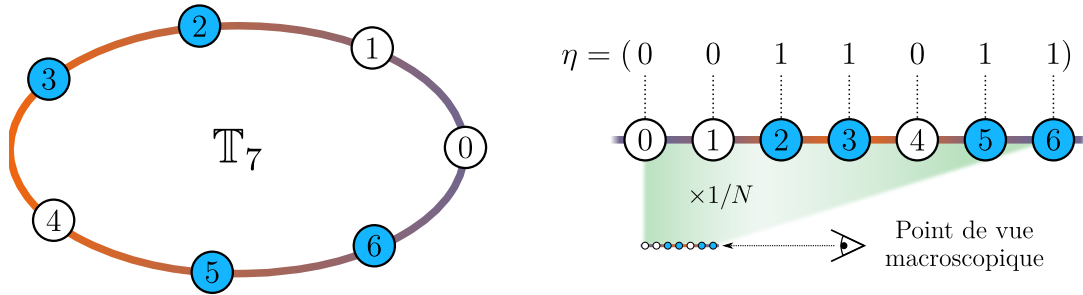


Figure 6 — Illustration d'un état possible pour $N = 7$ parmi les $2^7 = 128$ possibilités. L'espace microscopique est donné par $\mathbb{T}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vu macroscopiquement comme $\{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\}$.

État initial Pour initier le processus d'exclusion simple, on définit un état initial $\eta_0 = \eta_t|_{t=0}$ distribué suivant une mesure de probabilité initiale μ_N sur l'espace des états S_N . On peut voir μ_N essentiellement comme un vecteur de taille 2^N (le nombre d'états) dont les coordonnées sont positives ou nulles et de somme 1. Notons que l'état initial peut

éventuellement être déterministe si μ_N charge un état précis mais n'a aucune raison de l'être en toute généralité.

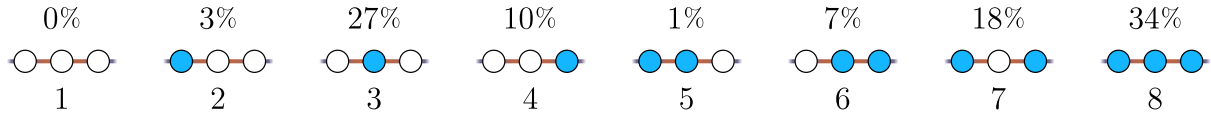


Figure 7 — Un exemple de distribution initiale pour $N = 3$. Dans ce cas-ci,

$$\mu_3 = \left(0, \frac{3}{100}, \frac{27}{100}, \frac{10}{100}, \frac{1}{100}, \frac{7}{100}, \frac{18}{100}, \frac{34}{100}\right).$$

Dans l'optique de converger vers la solution du problème de diffusion macroscopique (1.11), il faut relier en un certain sens la suite de mesures de probabilité $(\mu_N)_{N \geq 1}$ à la donnée initiale u_0 .

Définition 1.2 (Suite de mesures associées à un profil de densité) *Étant donné une fonction mesurable $u_0 : \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$, on dit qu'une suite de probabilités initiales $(\mu_N)_{N \geq 1}$ sur $(S_N)_{N \geq 1}$ est associée au profil de densité u_0 si, pour tout $G \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et tout $\delta > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N \left(\left\{ \eta \in S_N \text{ tels que } \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) \eta(i) - \int_{z \in \mathbb{T}} G(z) u_0(z) dz \right| > \delta \right\} \right) = 0. \quad (1.12)$$

Dans la pratique, en supposant u_0 Riemann-intégrable⁵, on prend pour la suite de mesure de probabilités μ_N le produit des mesures de Bernoulli de paramètres l'évaluation de la donnée u_0 en chacun des sites :

$$\mu_N := \bigotimes_{i \in \mathbb{T}_N} \mathcal{B}(u_0(i/N)). \quad (1.13)$$

Pour justifier ce point, remarquons que la probabilité dans (1.12) peut être majorée par

$$\begin{aligned} & \mu_N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) (\eta(i) - u_0(i/N)) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) u_0(i/N) - \int_{z \in \mathbb{T}} G(z) u_0(z) dz \right| > \delta \right) \\ & \leq \mu_N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) (\eta(i) - u_0(i/N)) \right| > \frac{\delta}{2} \right) + \mu_N \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) u_0(i/N) - \int_{z \in \mathbb{T}} G(z) u_0(z) dz \right| > \frac{\delta}{2} \right) \\ & \leq \frac{2}{\delta} \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) (\eta(i) - u_0(i/N)) \right| \right) + \underbrace{\frac{2}{\delta} \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} G(i/N) u_0(i/N) - \int_{z \in \mathbb{T}} G(z) u_0(z) dz \right|}_{\text{Ce terme tend vers 0 lorsque } N \rightarrow \infty \text{ grâce à la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale.}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

où l'inégalité de Markov a été utilisée pour passer de la deuxième à la troisième ligne. Il reste à montrer que l'espérance dans (1.14) tend aussi vers 0. Pour cela, regardons

⁵Cela permet d'assurer la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de u_0 dans (1.14). Cette hypothèse ne pose pas d'inconvénient dans le cadre appliqué dans lequel nous nous situons. Notons également qu'il est possible de s'en affranchir en complexifiant légèrement (1.13) en prenant $\mu_N := \bigotimes_{i \in \mathbb{T}_N} \mathcal{B}(N \int_{-1/2N}^{1/2N} u_0(\frac{i}{N} + z) dz)$.

dans un premier temps le cas simple où $u_0 \equiv c \in [0, 1]$ et $G \equiv 1$ sont identiquement constants. Dans ce cas, en prenant μ_N le produit des mesures de Bernoulli de paramètre c induit par u_0 comme indiqué dans (1.13), on peut remarquer que les variables de la famille $(\eta(i) - u_0(i/N))_{i \in \mathbb{T}_N}$ sont indépendantes, identiquement distribuées et de moyenne nulle. En conséquence, la loi forte des grands nombres nous assure la convergence μ_N -presque-sûre de

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} \eta(i) - u_0(i/N) \right|,$$

vers 0, ceci impliquant l'évanescence de (1.14). Dans le cas général où u_0 et G ne sont pas identiquement constants, les variables $(G(i/N)[\eta(i) - u_0(i/N)])_{i \in \mathbb{T}_N}$ restent indépendantes et de moyennes nulles mais ne sont plus identiquement distribuées, ce qui empêche d'appliquer la loi forte des grands nombres dans son énoncé classique et nécessite une version généralisée de cette loi⁶.

On peut pressentir, en observant la Définition 1.2, que la règle d'exclusion (qui force la majoration $\eta \leq 1$) empêche de capturer des données à valeurs supérieures à 1. En effet, on pourra observer qu'une contradiction apparaît dans (1.12) lorsqu'on essaye d'atteindre $u_0 \equiv 2$ avec $G \equiv 1$ et $\delta = 1/2$.

Dynamique et générateur infinitésimal Partant, pour $N \geq 1$ fixé, d'un état initial déterminé par la mesure de probabilité μ_N , on fait évoluer le système de particules suivant un processus markovien de sauts sur l'espace des états S_N . Chaque site est muni de deux horloges (une "saut à gauche" et une "saut à droite") qui sonnent à des temps aléatoires suivant des lois exponentielles de paramètre N^2 — on dira par la suite qu'elles "sonnent à taux N^2 ". Lorsqu'une horloge sonne, on fait le mouvement qui lui est associé (i.e. si une particule est présente sur le site concerné, on la fait sauter sur le site adjacent vers lequel pointe l'horloge), sous couvert du respect de la règle d'exclusion simple qui, rappelons-le, interdit la superposition de particules en un même site. Si jamais le mouvement engendré par la sonnerie d'une horloge demande à une particule de sauter sur un site déjà occupé, alors ce mouvement est annulé.

Dans la pratique, afin d'éviter de tester systématiquement la condition de présence de particule dans les sites cibles, on réunit les horloges $T_{i \rightarrow i+1}$ et $T_{i \leftarrow i+1}$ (sonnant à taux N^2) en une unique horloge $T_{i \leftrightarrow i+1} := \min(T_{i \rightarrow i+1}, T_{i \leftarrow i+1})$ (sonnant à taux $2N^2$) qui échange⁷ les valeurs de η en les deux sites concernés. Cette dynamique, *a priori* plus simple que la première, lui est en fait équivalente du fait du caractère sans mémoire de la loi exponentielle et de l'indiscernabilité des particules. Ce changement de point de vue sur la dynamique (*modulo* l'accélération d'un facteur 2 qui peut être rattrapée en changeant le coefficient de diffusivité dans (1.11)) permet de couvrir les quatre cas



⁶On pourra utiliser l'inégalité de Kolmogorov par exemple [27, page 287].

⁷Switch en anglais.

au moyen de la seule opération “switch”:

$$\eta^{i,i+1}(k) := \begin{cases} \eta(i+1) & \text{si } k = i, \\ \eta(i) & \text{si } k = i+1, \\ \eta(k) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.15)$$

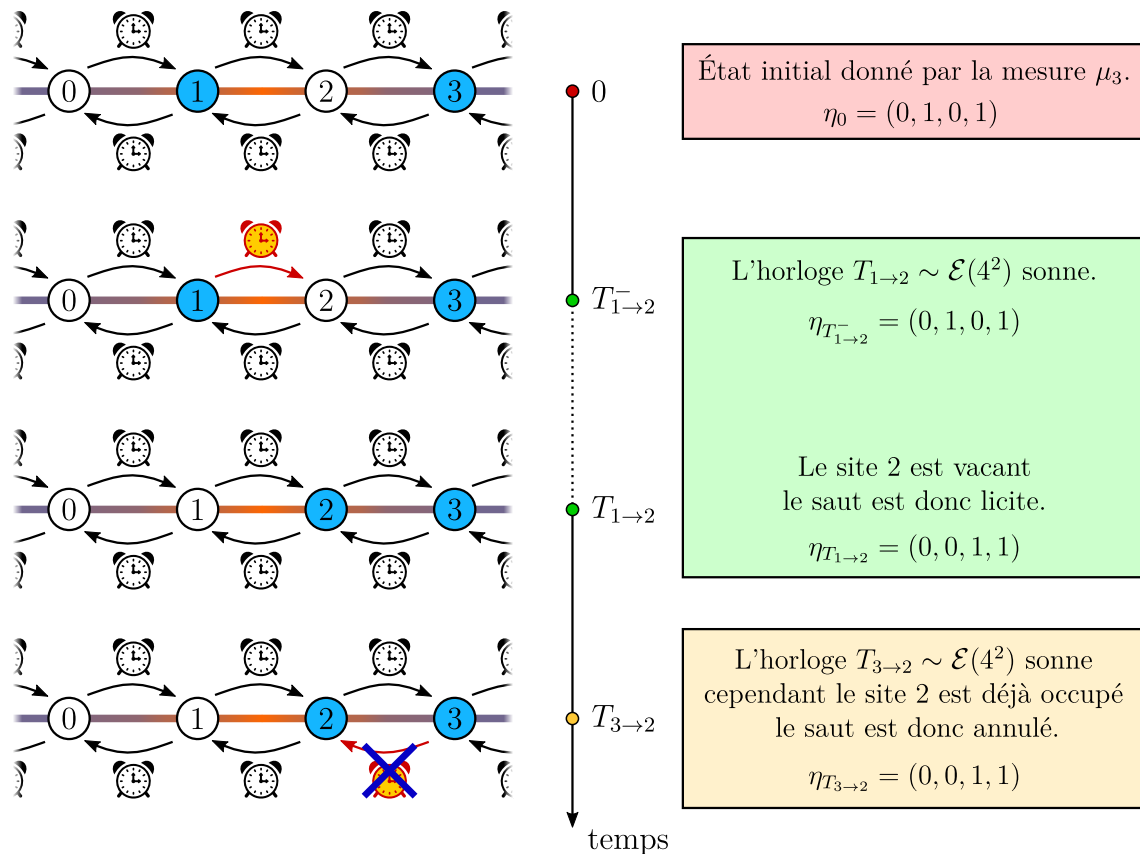


Figure 8 — Illustration d’une évolution possible pour $N = 4$.

Pour un horizon temporel $T > 0$ fixé, cette dynamique d’évolution produit un processus markovien de sauts $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$ (comme illustré sur la Figure 9) dans l’ensemble $D([0, T], S_N)$ des trajectoires *càdlàg* de $[0, T]$ à valeurs dans l’espace S_N . On équipe $D([0, T], S_N)$ de la topologie de Skorohod, qui est une topologie complètement métrisable, séparable et particulièrement adaptée à l’étude des trajectoires *càdlàg*. En effet, elle permet de “reparamétriser” le temps de manière à “aligner” discontinuités des fonctions pour les comparer, révélant ainsi une potentielle similarité structurelle entre ces fonctions qui serait autrement ignorée par les normes L^p — on pourra comparer la distance L^∞ à celle de

Skorohod⁸ entre les fonctions Heaviside(\cdot) et Heaviside($\cdot + \varepsilon$) pour s'en rendre compte.

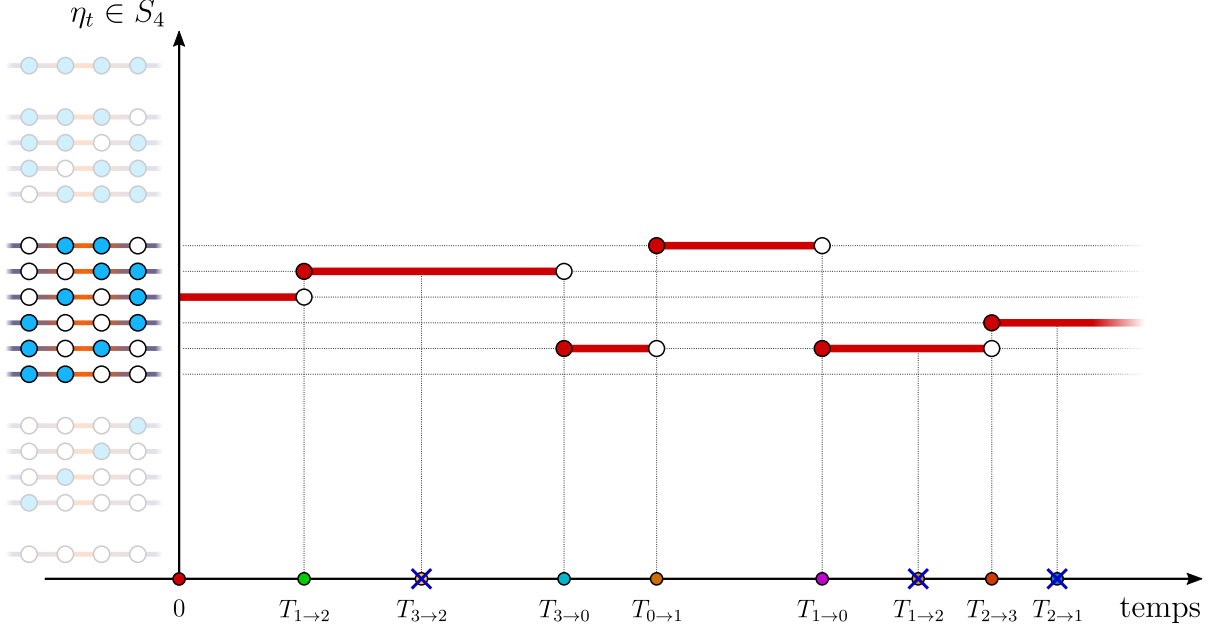


Figure 9 — Illustration d'une trajectoire possible sur S_4 . Notons que le nombre de particules n n'est pas affecté par la dynamique et est, par conséquent, fixé par l'état initial.

Discutons un instant des taux de sauts en N^2 imposés pour les horloges. Pour λ donné positif, une variable de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre λ va, en moyenne, survenir (sonner) tous les $1/\lambda$ unités de temps. En cela, on peut directement interpréter λ comme la fréquence moyenne de sonnerie. Dans le cas des horloges qui sonnent en N^2 , celles-ci vont sonner d'autant plus fréquemment que la taille du système sera importante — on dit qu'on “accélère les horloges”. Cette accélération est le moyen de lier l'espace et le temps dans le ratio parabolique (1.6) mentionné plus haut en sous-section 1.1.2. En effet, en remarquant que

- la distance caractéristique entre deux sites est donnée par $\delta_x = 1/N$ à l'échelle macroscopique,
- le temps de sonnerie caractéristique des horloges est donnée par $\delta_t = 1/N^2$,

il apparaît clairement que le ratio parabolique $\delta_x^2/2\delta_t$ est préservé indépendamment de N .

⁸En notant Λ l'ensemble des bijections continues et croissantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la distance de Skorohod entre deux fonctions f et g est donnée par $d_S(f, g) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\{\|\lambda - \text{Id}\|_\infty, \|f - g \circ \lambda\|_\infty\}$. Intuitivement, les bijections λ servent à “déformer” le temps pour “aligner” uniformément f et g (second terme du max), et sont pénalisées par leur éloignement uniforme par rapport à l'identité, quantifiant “leur intensité de déformation” (premier terme du max). Il est naturel de tester $\lambda : x \mapsto x + \varepsilon$ dans l'exemple ci-dessus.

L'évolution du processus est caractérisée par son *semi-groupe* noté $(\mathcal{S}_N(t))_{t>0}$ qui est essentiellement une matrice de transition de taille 2^N (le nombre d'états) dont les coefficients évoluent continûment dans le temps. $\mathcal{S}_N(t)$ agit à droite des mesures de probabilité sur l'espace des états S_N (au sens du produit d'un vecteur ligne par une matrice) et donne la nouvelle probabilité de distribution des états sur S_N après avoir laissé agir la dynamique pendant un temps t . L'évolution de $(\mathcal{S}_N(t))_{t>0}$ est régie par le système d'EDO suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{S}_N = L_N\mathcal{S}_N, & t > 0, \\ \mathcal{S}_N|_{t=0} = \text{Id}, \end{cases}$$

où l'opérateur L_N est une matrice de taille 2^N appelé *générateur infinitésimal*. Les éléments non-diagonaux de L_N sont typiquement, pour $\eta \neq \xi$,

$$L_N(\eta, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta \text{ et } \xi \text{ ne communiquent pas par saut direct,} \\ \tau & \text{si on saute de } \eta \text{ vers } \xi \text{ à taux } \tau. \end{cases}$$

Les éléments diagonaux de L_N sont, quant à eux, négatifs et font en sorte que la somme des coefficients de chaque ligne soit nulle, ce qui permet de conserver le caractère transitoire de la matrice \mathcal{S}_N — la somme des coefficients de chaque ligne de \mathcal{S}_N vaut 1. La mesure de probabilité sur S_N décrivant la distribution des états en partant de la distribution μ_N au temps t est ainsi donnée par

$$\mu_N(t) = \mu_N\mathcal{S}_N = \mu_N e^{tL_N}.$$

Classiquement, le générateur L_N est plutôt vu comme un opérateur agissant sur l'ensemble \mathbb{R}^{S_N} des fonctions de S_N à valeurs réelles. Notons que l'action de L_N sur de telles fonctions n'est autre que le produit d'une matrice contre un vecteur colonne, étant donné l'isomorphisme $\mathbb{R}^{S_N} \sim \mathbb{R}^{2^N}$. Dans le cas simple que nous considérons, le générateur s'exprime, pour $f : S_N \rightarrow \mathbb{R}$, de la manière suivante :

$$(L_N f)(\eta) = N^2 \sum_{i \in \mathbb{T}_N} [f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta)], \quad \forall \eta \in S_N, \quad (1.16)$$

où l'on rappelle que $\eta^{i,i+1}$ correspond à l'opération "switch" définie dans (1.15). On pourra remarquer que la sous-famille de \mathbb{R}^{S_N} des projections sur les sites, à savoir

$$(f_i : \eta \mapsto \eta(i))_{i \in \mathbb{T}_N}$$

fait ressortir un certain nombre d'informations intéressantes lorsqu'on les "teste" sur L_N , bien que le sous-espace qu'elle engendre soit ridiculement petit vis-à-vis de \mathbb{R}^{S_N} (dimensions N vs. 2^N). En effet, prenons pour l'exemple $N = 4$, et notons E le sous espace engendré par les projections sur les sites : $E := \text{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$. Un rapide calcul basé sur (1.16) nous donne

$$\begin{cases} (L_N f_0)(\eta) = N^2(f_3 - 2f_0 + f_1)(\eta), \\ (L_N f_1)(\eta) = N^2(f_0 - 2f_1 + f_2)(\eta), \\ (L_N f_2)(\eta) = N^2(f_1 - 2f_2 + f_3)(\eta), \\ (L_N f_3)(\eta) = N^2(f_2 - 2f_3 + f_0)(\eta), \end{cases}$$

ce qui fait apparaître

$$L_N|_E = \frac{1}{(1/N)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

la matrice du Laplacien discret muni de conditions périodiques. À partir de ce calcul, on peut déjà pressentir que la connaissance seule du comportement du générateur contre les projections $(f_i)_{i \in S_N}$ sera suffisante pour établir la convergence vers le problème macroscopique (1.11).

Passage aux mesures empiriques Pour s'affranchir de la taille du système, on transfère (injectivement) l'espace des états S_N vers l'ensemble

$$\mathcal{M} := \{\text{mesures positives sur le tore macroscopique } (\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T})) \text{ bornées par } 1\}. \quad (1.18)$$

Pour faire cela, en considérant chaque état du point de vue macroscopique (cf. la Figure 6), on place une mesure de Dirac en tous les sites occupés, puis on renormalise le tout en divisant par le nombre de sites (N). Encore une fois, la règle d'exclusion simple nous assure qu'il y aura au plus N masses de Dirac renormalisées, ce qui contient les valeurs de la mesure empirique en dessous de 1 au sens large. En notant $\pi^N(\eta)$ cette mesure, on a ainsi

$$\pi_N(\eta) := \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} \eta(i) \times \delta_{i/N}, \quad (1.19)$$

où $\delta_{i/N}$ représente la mesure de Dirac chargeant le point $i/N \in \mathbb{T}$.

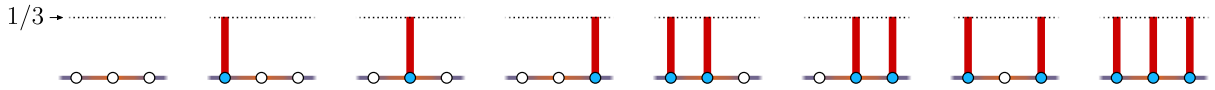


Figure 10 — Illustration des mesures empiriques associées aux états de S_3 . Les colonnes rouges représentent des masses de Dirac en les sites occupés.

L'introduction de cette notion de mesure empirique est cruciale puisqu'elle va permettre de comparer sur le même espace (\mathcal{M}) des systèmes de différentes tailles en encapsulant cette information "taille du système" dans l'application π_N de "passage à la mesure empirique".

En appliquant la mesure empirique au processus d'évolution $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$, on travaille à présent sur le processus *càdlàg* à valeurs mesures dans \mathcal{M} :

$$\pi_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} \eta_t(i) \times \delta_{i/N},$$

dont une illustration est donnée sur la Figure 11 ci-dessous.

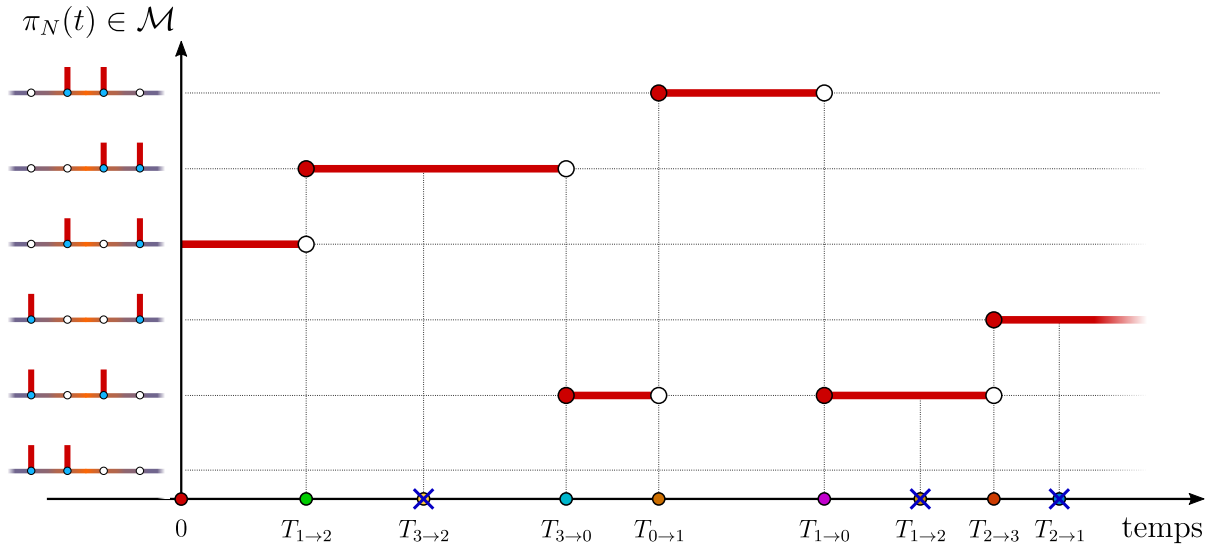


Figure 11 — Illustration de la trajectoire de mesures empiriques sur \mathcal{M} associée à la trajectoire sur S_4 représentée sur la Figure 9. Intuitivement, lorsque $N \rightarrow \infty$, les masses de Dirac vont envahir l'espace macroscopique, de sorte que la mesure limite va “acquérir” une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité sera alors la solution du problème macroscopique (1.11).

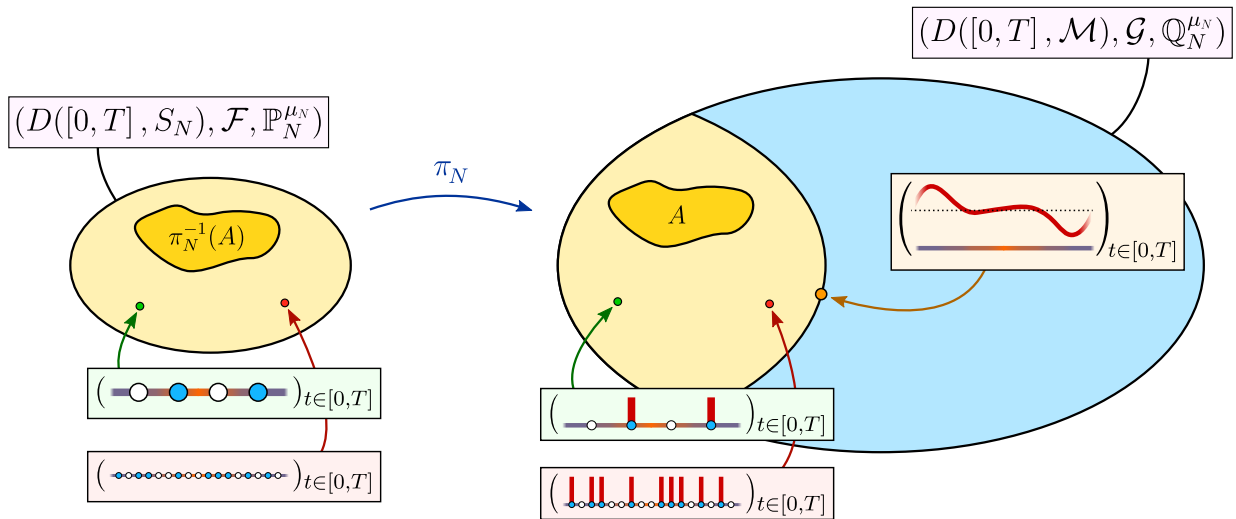


Figure 12 — Schématisation des espaces probabilisés associés aux trajectoires dans S_N (à gauche) et dans \mathcal{M} (à droite). On peut remarquer que $D([0, T], \mathcal{M})$ ne se contente pas de contenir uniquement des processus de mesures atomiques telles que le sont les processus $\pi_N(t)$, mais possède également des processus de mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. En particulier, $D([0, T], \mathcal{M})$ contient la trajectoire $(u(t, x)dx)_{t \in [0, T]} = \bullet$, où u est la solution⁹ du problème macroscopique (1.11). Une définition claire des objets mentionnés ici est donnée dans le paragraphe qui suit.

Probabilités sur les trajectoires On note $\mathbb{P}_N^{\mu_N}$ la mesure de probabilité sur l'espace des trajectoires $D([0, T], S_N)$ associée au processus $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$ initié par la mesure μ_N . En utilisant l'application mesurable π_N , le processus est transféré sur $D([0, T], \mathcal{M})$ et devient $(\pi_N(t))_{t \in [0, T]}$, qu'on mesure maintenant avec la probabilité $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$, définie comme la mesure image $\mathbb{P}_N^{\mu_N}$ par l'application π_N :

$$\mathbb{Q}_N^{\mu_N}(A) := \mathbb{P}_N^{\mu_N}(\pi_N^{-1}(A)), \quad \text{pour tout mesurable } A \subset D([0, T], \mathcal{M}).$$

Un schéma illustrant ces espaces probabilisés est donné dans la Figure 12 ci-dessus.

Notions de solution Dans le contexte des processus d'exclusion simple, on travaille avec des solutions faibles au sens des distributions. Pour cet exemple de l'équation de la chaleur sur le tore, on peut montrer *a priori* que toute solution faible en ce sens est en réalité une solution classique, ce qui rend ces deux notions de solutions indiscernables. La raison pour laquelle on utilise des solutions faibles repose sur le fait qu'elles permettent d'accéder au même résultat en montrant moins de propriétés sur la densité limite. En effet, rappelons qu'une solution classique demande à la solution d'être \mathcal{C}^1 en temps et \mathcal{C}^2 en espace, tandis qu'une solution au sens des distributions demande à être, suivant le degré de faiblesse qu'on impose,

- \mathcal{C}^1 en temps et H^1 en espace (faible : “W”),
- \mathcal{C}^1 en temps et L^2 en espace (plus faible : “WW”),
- L^2 en temps et L^2 en espace (encore plus faible : “WWW”).

C'est cette dernière notion de solution que l'on va utiliser ici, puisque la règle d'exclusion, empêchant les particules de se concentrer en un même site, force la densité limite à être bornée par 1, la plaçant ainsi dans tous les espaces L^p souhaités. Le seul point à vérifier sur la densité limite est alors de satisfaire la formulation faible (1.20) ci-dessous.

Définition 1.3 (Être solution de (1.11)) *On dit que $u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}))$ est une solution faible de (1.11) si, pour tout $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T})$ et presque tout $t \in [0, T]$, u vérifie la formulation faible suivante :*

$$\langle u(t), G(t) \rangle - \langle u_0, G(0) \rangle = \int_0^t \langle u(s), \partial_s G(s) + \partial_{xx} G(s) \rangle ds, \quad (1.20)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire L^2 sur le tore, et où les dépendances en espace ont été omises pour plus de clarté.

La formulation (1.20) s'obtient de manière classique en multipliant l'équation $\partial_t u = \partial_{xx} u$ par la fonction test G , choisie avec suffisamment de régularité pour permettre les intégrations par parties nécessaires au degré de faiblesse de la notion de solution WWW. On

⁹En un sens à préciser.

pourra noter que l'utilisation du tore \mathbb{T} comme domaine spatial facilite grandement la gestion des bords — on apprécie également sa compacité. L'usage du produit scalaire L^2 est également pertinente pour assurer la transition entre les processus de mesures atomiques et le processus limite de mesures absolument continues. On peut facilement s'en convaincre en remarquant que le produit $\langle u(t), G(t) \rangle$ coïncide avec l'intégrale

$$\int_{\mathbb{T}} G(t) \times \pi(t, dx) =: \langle \pi(t), G(t) \rangle,$$

dès que $\pi(t, dx) = u(t, x)dx$.

Comme mentionné plus haut, on peut montrer l'équivalence entre les différentes notions de solutions faibles et fortes pour le cas particulier de l'équation de la chaleur (1.11). En effet, remarquons qu'une solution classique est aussi une solution W qui est une solution WW qui, enfin, est elle-même une solution WWW. Montrer l'unicité des solutions WWW du problème (1.11)¹⁰ suffit alors pour avoir l'équivalence entre ces notions de solutions¹¹. Pour obtenir un tel résultat d'unicité, on teste la formulation faible (1.20) contre certaines fonctions test v , suffisamment appropriées pour qu'on puisse faire apparaître $\int_0^T \int_{\mathbb{T}} u \times \varphi dxdt = 0$, pour tout φ dans un ensemble suffisamment large pour que la nullité de cette dernière intégrale implique $u \equiv 0$. Pour cela, considérons, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T})$, le problème de Cauchy “dual” à (1.20) :

$$\begin{cases} \partial_t v = -\partial_{xx} v + \varphi, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}, \\ v|_{t=T} \equiv 0, & x \in \mathbb{T}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Il convient de remarquer que l'EDP dans (1.21) n'est pas une équation de la chaleur rétrograde compte tenu du fait que le problème est prescrit avec une donnée finale¹². On peut voir le problème (1.21) comme posé sur l'intervalle $(0, 1)$ avec des conditions périodiques. En cela, en notant $\tilde{\varphi}$ le prolongement 1-périodique de φ , le principe de Duhamel [65, page 49], [82, page 154]¹³ nous permet d'écrire une solution v comme la restriction à l'intervalle $(0, 1)$ de

$$\tilde{v}(t, x) = \int_{s=0}^t \int_{z \in \mathbb{R}} G(t-s, x-z) \times \tilde{\varphi}(s, z) dz ds, \quad (1.22)$$

où $G(t, x) = e^{-x^2/4t}/\sqrt{4\pi t}$ est le noyau de la chaleur sur \mathbb{R} . Il apparaît alors clairement que v , telle que définie dans (1.22), est une solution classique de (1.22) (donc régulière), ce qui l'autorise à être testée dans la formulation faible (1.20). Ceci nous amène directement à

$$\int_{s=0}^t \int_{z \in \mathbb{R}} u(s, z) \times \varphi(s, z) dz ds = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T}),$$

et nous permet de conclure à la nullité de u — voir le livre de Brézis [35, Lemme IV.2] par exemple.

¹⁰Qui peut, en fait, se réduire à montrer l'unicité de la solution triviale par linéarité.

¹¹Notons qu'on a bien l'existence d'une solution forte en exhibant la convolution du noyau de la chaleur contre le prolongement 1-périodique de u_0 sur \mathbb{R} .

¹²Réécrire l'équation pour $w(t, x) := v(-t, x)$ pour s'en convaincre

¹³Voir aussi la sous-section 1.1.6, paragraphe Existence.

Théorème de la limite hydrodynamique Les éléments du problème étant à présent introduits, on peut énoncer le théorème principal reliant la dynamique microscopique tout juste décrite au le problème de diffusion macroscopique (1.11).

Théorème 1.4 (Limite hydrodynamique pour l'équation de la chaleur sur le tore) Donnons-nous un horizon temporel $T > 0$. Soit $u_0 : \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$ une donnée initiale mesurable, et $(\mu_N)_{N \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur les espaces d'états $(S_N)_{N \geq 1}$ associée à u_0 au sens de la Définition 1.2. Soit $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$ le processus initié par μ_N et poussé par la dynamique associée au générateur L_N défini dans (1.16).

Alors la suite processus de mesures empiriques $(\pi_N(t))_{t \in [0, T]}$ associée à $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$, mesurée par la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$ sur l'espace $D([0, T], \mathcal{M})$, et définie par

$$(\pi_N(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} \eta_t(i) \times \delta_{i/N},$$

converge en probabilité vers le processus de mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue

$$(\pi(t, dx))_{t \in [0, T]} = (u(t, x) dx)_{t \in [0, T]},$$

dont la densité u est l'unique solution faible, au sens de la Définition 1.3, du problème de Cauchy (1.11).

En particulier, on a, pour tout $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T})$, tout $t \in [0, T]$, et tout $\delta > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\left\{ (\nu(t)) \in D([0, T], \mathcal{M}) \text{ tels que } \left| \langle \nu(t), G(t) \rangle - \langle u(t), G(t) \rangle \right| > \delta \right\} \right) = 0. \quad (1.23)$$

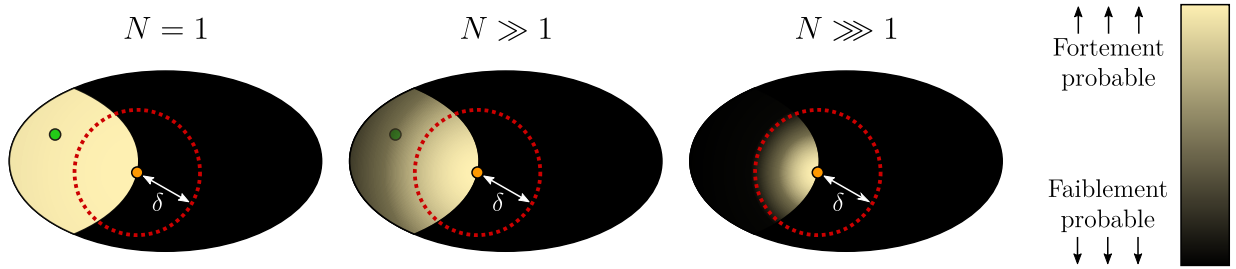


Figure 13 — Distribution schématique de la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$ sur l'espace $D([0, T]; \mathcal{M})$. À mesure que N grandit, la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$ va se concentrer sur l'unique processus de mesures $(\pi(t, dx))_{t \in [0, T]} = (u(t, x) dx)_{t \in [0, T]} = \bullet$ dont la densité u est la solution du problème macroscopique (1.11). On peut ainsi interpréter la limite (1.23) comme une apparition de moins en moins probable des trajectoires $(\nu(t, dx))_{t \in [0, T]} = \bullet$, dissidentes de par leur éloignement avec la trajectoire solution.

Étapes de la preuve de la limite hydrodynamique Le Théorème 1.4 se démontre essentiellement en quatre grandes étapes qui sont les suivantes :

1 Tension de la suite $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 1}$. On montre que la suite de mesures de probabilités $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 1}$ sur l'espace des trajectoires à valeurs mesure $D([0, T], \mathcal{M})$ est tendue, ce qui équivaut¹⁴ à sa relative compacité pour la topologie faible des mesures. Pour montrer cette propriété, deux points sont à considérer :

- pour tout $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, tout $t \in [0, T]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{N \geq 1} \left\{ \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(|\langle \pi_N(t), G \rangle| > M_\varepsilon \right) \right\} < \varepsilon,$$

qui signifie que l'essentiel des évènements probables peut être significativement isolé dans un compact,

- pour tout $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, et tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{N \geq 1} \sup_{t \in [\delta, T-\delta]} \sup_{|\theta| < \delta} \left\{ \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(|\langle \pi_N(t + \theta), G \rangle - \langle \pi_N(t), G \rangle| > \varepsilon \right) \right\} = 0,$$

qui permet de contrôler "l'amplitude" des sauts du processus.

Cette propriété de relative compacité nous garantit l'existence de points d'adhérence pour la suite $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 1}$, qu'on dénotera par la suite

$$\mathbb{Q}_\infty \in \text{Adh}((\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 1}).$$

2 Absolue continuité des trajectoires limites. Maintenant que l'on connaît l'existence d'au moins un élément \mathbb{Q}_∞ dans $\text{Adh}((\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 1})$, il s'agit de montrer que \mathbb{Q}_∞ charge des processus de mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\mathbb{Q}_\infty \left(\left\{ (\pi(t)) \in D([0, T], \mathcal{M}) \text{ tels que } \pi_t \ll \lambda \text{ pour tout } t \in [0, T] \right\} \right) = 1.$$

C'est encore la règle d'exclusion simple qui nous sauve ici : puisque

$$\langle \pi_N(t), G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} \eta_t(i) \times G\left(\frac{i}{N}\right),$$

et que $\eta_t(i)$ vaut 0 ou 1, on a, pour tout $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, et tout $t \in [0, T]$,

$$\left| \langle \pi_N(t), G \rangle \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{T}_N} |G\left(\frac{i}{N}\right)|,$$

¹⁴Voir le théorème de Prohorov dans le livre de Kipnis et Landim [93, page 51], par exemple.

qui se propage par convergence faible sur la trajectoire limite :

$$|\langle \pi(t), G \rangle| \leq \int_{z \in \mathbb{T}} |G(z)| dz. \quad (1.24)$$

À partir de là, il faut essentiellement tester (1.24) en prenant pour G les indicatrices des boréliens du tore¹⁵, ce qui donne, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$,

$$\pi(t, B) \leq \lambda(B),$$

et implique que les négligeables de la mesure de Lebesgue λ sont également négligeables pour la mesure $\pi(t)$.

On sait ainsi, à partir de ce point, que les trajectoires limites sont presque sûrement de la forme

$$(\pi(t, dx))_{t \in [0, T]} = (u(t, x) dx)_{t \in [0, T]}.$$

L'étape suivante consiste à décrire les propriétés de la densité associée au processus limite.

3 **Caractérisation des trajectoires limites.** L'objectif de cette étape consiste à montrer que la densité de la trajectoire limite $u = u(t, x)$ est effectivement une solution faible au sens de la Définition 1.3 du problème de Cauchy (1.11) : pour tout $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T})$ et tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{Q}_\infty \left(\left\{ (u(t, x) dx)_{t \in [0, T]} \in D([0, T], \mathcal{M}) \text{ tels que } u \text{ vérifie (1.20)} \right\} \right) = 1. \quad (1.25)$$

Pour montrer cette égalité, on fait apparaître une martingale qui peut être vue comme l'équivalent microscopique de l'opérateur associé à la formulation faible : pour tout $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T})$ et tout $t \in [0, T]$, cette martingale s'écrit

$$\mathcal{M}_N(t) := \langle \pi_N(t), G(t) \rangle - \langle \pi_N(0), G(0) \rangle - \int_0^t (\partial_s + L_N)(\langle \pi_N(s), G(s) \rangle) ds,$$

qu'il est pertinent de regarder en parallèle de l'opérateur associé à la formulation faible

$$\mathcal{W}_u(t) := \langle u(t), G(t) \rangle - \langle u_0, G(0) \rangle - \int_0^t (\partial_s + \Delta)(\langle u(s), G(s) \rangle) ds.$$

Notons que l'introduction de \mathcal{W}_u permet de réécrire simplement (1.25) comme

$$\mathbb{Q}_\infty \left(\mathcal{W}_u(t) = 0 \right) = 1. \quad (1.26)$$

On reformule alors $\mathcal{W}_u(t)$ comme $\mathcal{W}_u(t) - \mathcal{M}_N(t) + \mathcal{M}_N(t)$ pour ensuite montrer que

¹⁵Cela nécessite de prendre quelques précautions puisque (1.24) n'est a priori valide que pour $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$. Pour pallier ce problème, on peut utiliser le théorème de Lusin [105], [129, page 63] pour approximer les indicatrices par des fonctions régulières sur tout le tore, à l'exception d'une partie de mesure ε .

- $\mathcal{W}_u(t) - \mathcal{M}_N(t)$ converge presque sûrement vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui résulte de la convergence de l'opérateur L_N vers le Laplacien Δ , comme semblait déjà le suggérer le calcul (1.17) (et découle effectivement en pratique d'un développement de Taylor),

puis que

- la martingale $\mathcal{M}_N(t)$ converge elle-même presque sûrement vers 0. Pour démontrer ce second point, on se ramène essentiellement à prouver que la variance de $\mathcal{M}_N(t)$,

$$\text{Var}(\mathcal{M}_N(t)) = \mathbb{E}(\mathcal{M}_N(t)^2) - \underbrace{\left[\mathbb{E}(\mathcal{M}_N(t)) \right]^2}_{=0} = \mathbb{E}(\mathcal{M}_N(t)^2)$$

tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, ce qui marque la disparition de toute trace de stochasticité dans la trajectoire limite.

4 **Unicité de la solution.** Pour achever la preuve de la limite hydrodynamique, il faut enfin montrer que la distribution de la trajectoire limite se concentre effectivement en un unique point, ce qui nous autorise à dire que la mesure de probabilité \mathbb{Q}_∞ est finalement une masse de Dirac chargeant *la* trajectoire solution.

Bien que cet aspect ne pose pas de réel problème dans l'exemple de l'équation de la chaleur sur le tore présenté ici¹⁶, il est important de mentionner cette étape qui, pour certains processus d'exclusion simple, peut s'avérer délicate.

Processus d'exclusion à “frontières ralenties” Dans leur papier [15] de 2017, Balasso, Menezes, Neumann et Souza considèrent un système de particules n'évoluant plus sur le tore discret $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, comme c'était le cas pour l'exemple précédent, mais sur le réseau $\llbracket 1; N-1 \rrbracket = \{1, \dots, N-1\}$. Le modèle qu'ils proposent permet de produire à la limite hydrodynamique l'équation de la chaleur sur le segment $(0, 1)$, munie de conditions de Neumann, Dirichlet et Robin sur les bords. À l'échelle microscopique, ces conditions de bords sont associées à certaines dynamiques de naissances et de morts des particules, que l'on accélère au moyen d'un facteur $N^{2-\theta}$. Ici, le paramètre θ est un réel positif ou nul permettant de jouer sur le scaling algébrique espace-temps — rappelons que $\theta = 0$ permet de retrouver le ratio parabolique (1.6) assurant la convergence vers la dynamique diffusive. Lorsque θ est strictement positif, on parle de *frontières ralenties*¹⁷ pour insister sur le fait que les événements en question surviennent à plus basse fréquence que les échanges diffusifs — la dynamique se produit alors dans le scaling espace-temps $\delta_x^{2-\theta}/\delta_t = c$. On peut en particulier remarquer que pour $\theta > 2$, $N^{2-\theta}$ va tendre vers zéro si bien que les dynamiques de bords vont disparaître à la limite hydrodynamique. On s'attend, dans ce cas, à récupérer des conditions de Neumann homogènes, caractérisant la préservation de la masse à l'échelle macroscopique.

¹⁶Voir le paragraphe “Notion de solution” plus haut.

¹⁷*Slow boundaries* en anglais.

1.1. Contexte et motivations

La dynamique globale du modèle proposé dans [15] se décompose en trois sous-dynamiques distinctes permettant de capturer le processus de diffusion à l'intérieur du domaine ainsi que chacune des deux conditions de bord :

- *À l'intérieur.* Sur toutes paires de sites adjacents de $\llbracket 1; N - 1 \rrbracket$, les statuts d'occupation sont échangés à taux N^2d .
- *À la frontière gauche.* Pour une constante $a \in (0, 1)$ donnée,
 - si le site 1 est vide, alors on y crée une particule à taux $N^{2-\theta}a$,
 - si le site 1 est plein, alors on supprime sa particule à taux $N^{2-\theta}(1 - a)$.
- *À la frontière droite.* Pour une constante $b \in (0, 1)$ donnée,
 - si le site $N - 1$ est vide, alors on y crée une particule à taux $N^{2-\theta}b$,
 - si le site $N - 1$ est plein, alors on supprime sa particule à taux $N^{2-\theta}(1 - b)$.

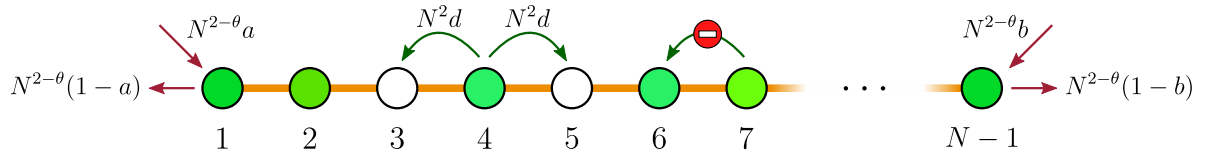


Figure 14 — Illustration de la dynamique du système de particules considéré par Baldasso, Menezes, Neumann et Souza dans [15].

Rappelons que ces dynamiques sont toutes supervisées par la règle d'exclusion qui empêche la superposition de particules en un même site. Notons également qu'il est possible de ralentir les dynamiques de bords avec deux valeurs différentes de θ pour le bord de gauche et le bord de droite — avec un θ_{gauche} et un θ_{droite} .

Un des principaux résultats établis dans [15] est la caractérisation des conditions de bords observées à la limite hydrodynamique en fonction de la position de θ par rapport à 1. Plus précisément,

- si $\theta > 1$, alors la dynamique de bord est trop ralentie pour permettre l'apparition d'un flux et on récupère des conditions de Neumann homogènes. L'équation limite est dans ce cas

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u, & t > 0, \quad x \in (0, 1), \\ -d\partial_x u|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ d\partial_x u|_{x=1} = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Comme mentionné plus haut, il était attendu d'observer des conditions de Neumann lorsque $\theta > 2$ puisque les événements de bords deviennent de moins en moins fréquents à mesure que l'on fait grandir le système. On peut cependant être surpris de voir que ces conditions de bords sont préservées lorsque $1 < \theta \leq 2$, étant donné que les événements de bords (autorisant création et suppression d'individus)

ne disparaissent pas lorsque la taille du système tend vers l'infini. Ceci s'explique par un équilibre entre les individus entrants et les individus sortants, se produisant finalement indépendamment des valeurs de a et de b qui n'interviennent plus dans l'équation limite¹⁸.

- si $0 \leq \theta < 1$, alors les évènements de bords sont relativement peu ralentis par rapport à la dynamique diffusive. On obtient dans ce cas des conditions de type Dirichlet non-homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u, & t > 0, \quad x \in (0, 1), \\ u|_{x=0} = a, & t > 0, \\ u|_{x=1} = b, & t > 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

- enfin, si $\theta = 1$, on se trouve dans un régime transitoire et l'on observe des conditions de type Robin non-homogènes :

$$\begin{cases} \partial_t u = d\Delta u, & t > 0, \quad x \in (0, 1), \\ -d\partial_x u|_{x=0} = a - u|_{x=0}, & t > 0, \\ d\partial_x u|_{x=1} = b - u|_{x=1}, & t > 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Deux difficultés techniques supplémentaires surviennent lors de l'établissement de la limite hydrodynamique de ce système de particules. La première provient du fait que les évènements de création/suppression d'individus se font uniquement sur les bords et non sur la totalité des sites du bulk. Cela a pour effet de faire apparaître certains termes dans la martingale que l'on ne peut pas écrire comme des fonctions de la mesure empirique — voir (1.19). Pour pallier à ce problème, on fait appel à des lemmes dits de *Remplacement* qui permettent essentiellement de donner une épaisseur de largeur ε aux bords. On envoie ensuite ε vers 0 après avoir envoyé N vers l'infini. On pourra se faire une idée plus concrète de ces lemmes en allant voir les Lemmes 2.9 et 2.10 ainsi que la Figure 43.

La seconde difficulté porte sur l'espace où vit la solution. Pour l'équation de la chaleur sur le tore, l'exclusion simple garantit que le profil de densité limite u est dans $L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}))$. C'est également le cas pour le système de particules présenté ici, mais cet espace n'est pas suffisant pour pouvoir correctement définir la trace de u aux bords $y = 0$ et $y = 1$. On a ainsi besoin d'avoir, pour la densité limite u ,

$$u \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(0, 1)).$$

Pour montrer que $u(t, \cdot)$ est à valeurs dans \mathcal{H}^1 , il est suffisant d'établir l'estimation d'une certaine d'énergie. Le résultat découle alors d'une adaptation temporelle de la proposition suivante.

¹⁸On peut malgré cela pressentir ici que les cas dégénérés où $ab(1-a)(1-b) = 0$ ne permettront pas d'atteindre cet équilibre entre les entrées et les sorties, ce qui apparaît comme une explication heuristique de la contrainte $0 < a, b < 1$, nécessaire pour passer certains arguments de la preuve.

Proposition 1.5 (Condition suffisante pour être dans \mathcal{H}^1) *Soit $u \in L^2(0,1)$, si la quantité*

$$E(u) := \sup_{G \in \mathcal{C}_c^2(0,1)} \left\{ \langle u, G' \rangle - \frac{1}{2} \|G\|_{L^2(0,1)}^2 \right\}$$

est finie, alors $u \in \mathcal{H}^1(0,1)$.

La preuve de la Proposition 1.5 repose sur le théorème de représentation de Fréchet-Riesz. On pose la forme linéaire ℓ sur $\mathcal{C}_c^2(0,1)$,

$$\ell(G) := \langle u, G' \rangle.$$

Si la quantité $E(u)$ est finie, alors il existe $c > 0$ tel que, pour tout $G \in \mathcal{C}_c^2(0,1)$, on a

$$\ell(G) \leq \frac{1}{2} \|G\|_{L^2(0,1)}^2 + c.$$

En prenant, pour δ donné positif, δG à la place de G , il vient

$$\ell(G) \leq \frac{\delta}{2} \|G\|_{L^2(0,1)}^2 + c/\delta. \quad (1.30)$$

La minimisation de $\delta \mapsto \frac{\delta}{2} \|G\|_{L^2(0,1)}^2 + c/\delta$ montre alors que le contrôle (1.30) peut être affiné en

$$\ell(G) \leq \frac{c + \sqrt{c}}{\sqrt{2}} \|G\|_{L^2(0,1)},$$

ce qui établit que la forme linéaire ℓ est continue sur $\mathcal{C}_c^2(0,1)$, dense dans $L^2(0,1)$. On peut alors prolonger ℓ en une forme linéaire sur le Hilbert $L^2(0,1)$, pour laquelle le théorème de représentation de Fréchet-Riesz s'applique : il existe un élément $-\varphi$ dans $L^2(0,1)$ tel que $-\varphi$ représente ℓ au sens où

$$\ell(G) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle u, G' \rangle \stackrel{\text{Riesz}}{=} -\langle \varphi, G \rangle,$$

pour toute fonction $G \in L^2(0,1) \supset \mathcal{C}_c^2(0,1)$. Ceci caractérise précisément l'appartenance de u à $\mathcal{H}^1(0,1)$.

La raison pour laquelle a et b sont pris différents de 0 et de 1 provient d'un blocage technique dans la preuve des lemmes de Remplacement et de l'estimée de l'énergie. Plus précisément, il faut, à certains moments dans ces preuves, contrôler l'entropie $\mathcal{H}(\mu_N | \nu_N)$ de la mesure initiale μ_N par rapport à une mesure de référence ν_N , produit des mesures de Bernoulli de paramètre γ :

$$\nu_N := \bigotimes_{i \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket} \mathcal{B}(\gamma),$$

pour $\gamma = a$ et $\gamma = b$. Si $0 < a, b < 1$, alors ν_N donne une probabilité non nulle à tous les états du système de sorte que toute mesure sur l'ensemble des états est absolument continue par rapport à ν_N . Cela garantit que l'entropie $\mathcal{H}(\mu_N | \nu_N)$ reste finie, et on dispose

alors d'une forme explicite pour son expression. Lorsque a et b sont 0 ou 1, alors les mesures ν_N dégénèrent au sens où elles ne chargent plus que l'état complètement vide ou l'état complètement plein. Dans ce cas, la seule mesure absolument continue par rapport à ν_N est ν_N elle-même, si bien que $\mathcal{H}(\mu_N|\nu_N)$ est infinie dès que μ_N est différente de ν_N . Ces faits concernant l'entropie peuvent être retrouvés dans [93, Appendice 1, Section 8], en particulier dans le Théorème 8.3. On pourra également aller voir l'Appendice 2.A.1 pour plus de détails.

Il est naturel de s'interroger sur la raison pour laquelle on utilise des dynamiques de naissances et de mort sur les bords si l'objectif final est d'obtenir des conditions de bord de type Neumann dans l'équation limite. À vrai dire, il est en fait possible de ne garder que la dynamique diffusive pour produire l'équation (1.27). Un tel système de particules ne possède cependant pas de mesure de probabilité stationnaire unique¹⁹ étant donné que le nombre de particules est fixé aléatoirement par la mesure de probabilité initiale. En ajoutant des dynamiques de naissances et de morts aux deux extrémités, on permet à tous les états du système de potentiellement communiquer entre eux, ce qui fixe l'unicité de la mesure de probabilité stationnaire — voir [93, Appendice 1, Section 4].

Pour tout $N \geq 2$, le système de particules de Baldasso, Menezes, Neumann et Souza, décrit ci-dessus, possède ainsi une unique mesure invariante μ_N^{sta} qui va, lorsque $N \rightarrow \infty$, être associée à un profil de densité affine u_∞ ²⁰ au sens de la Définition 1.2. De manière étonnante, u_∞ , que l'on pourrait imaginer être associée à la limite en temps long de la solution u , ne dépend pas de la mesure initiale μ_N associée à la donnée initiale u_0 , mais uniquement des valeurs de a et de b . Par exemple, dans le cas $\theta > 1$ (produisant des conditions de type Neumann), on a systématiquement $u_\infty \equiv (a+b)/2$, ce qui ne correspond pas à la limite en temps long de u qui converge uniformément vers $u^\infty \equiv \|u_0\|_{L^1(0,1)}$. Il apparaît ainsi que les limites $N \rightarrow \infty$ et $t \rightarrow \infty$ ne peuvent pas permuter.

Un lien entre u_∞ et u^∞ a été établi dans un article très récent de Landim et Velasco [99], dans lequel les auteurs montrent qu'en ré-accélérant la dynamique d'un facteur N , la donnée initiale devient instantanément identiquement constante, égale à $u^\infty \equiv \|u_0\|_{L^1(0,1)}$, avant de dériver vers la valeur de $u_\infty \equiv (a+b)/2$.

1.1.4 Influence de la frontière dans les équations de diffusion posées en demi-espace

Au cours des dernières décennies, un consensus s'est établi sur l'importance des *lignes de diffusion rapide* dans l'explication de certains phénomènes de propagation en écologie et en épidémiologie. Parmi les exemples les plus emblématiques de cette constatation figurent ceux de la Peste Noire et des loups canadiens, que l'on détaille ci-dessous.

¹⁹Les mesures de probabilité chargeant les états “système complètement vide” et “système complètement plein” sont deux exemples triviaux de mesures invariantes.

²⁰Ce profil de densité u_∞ porte le nom de *limite hydrostatique* et vérifie en particulier le problème stationnaire elliptique associé à l'équation de u .

1.1. Contexte et motivations

- Vers le milieu du 14^{ème} siècle, la Peste Noire a frappé l'Europe, l'Asie et l'Afrique. En l'espace de quelques années, cette pandémie a tué des millions de personnes, soit entre 30% et 60% de la population européenne. Il semble, selon les historiens, que l'épidémie ait fait sa première apparition dans le port de Caffa²¹ en Crimée, lors d'un siège de l'armée mongole en 1346. Il s'avère qu'à partir de ce moment-là, la Route de la Soie, qui constituait à l'époque de grandes lignes commerciales reliant l'Orient et l'Occident, a favorisé la diffusion de l'épidémie dans tout le reste de l'Europe [130], notamment au travers de l'axe majeur Caffa-Constantinople-Athènes-Palermo-Gênes-Marseille — voir **1**-**2**-**3**-**4**-**5**-**6** sur la Figure 15.

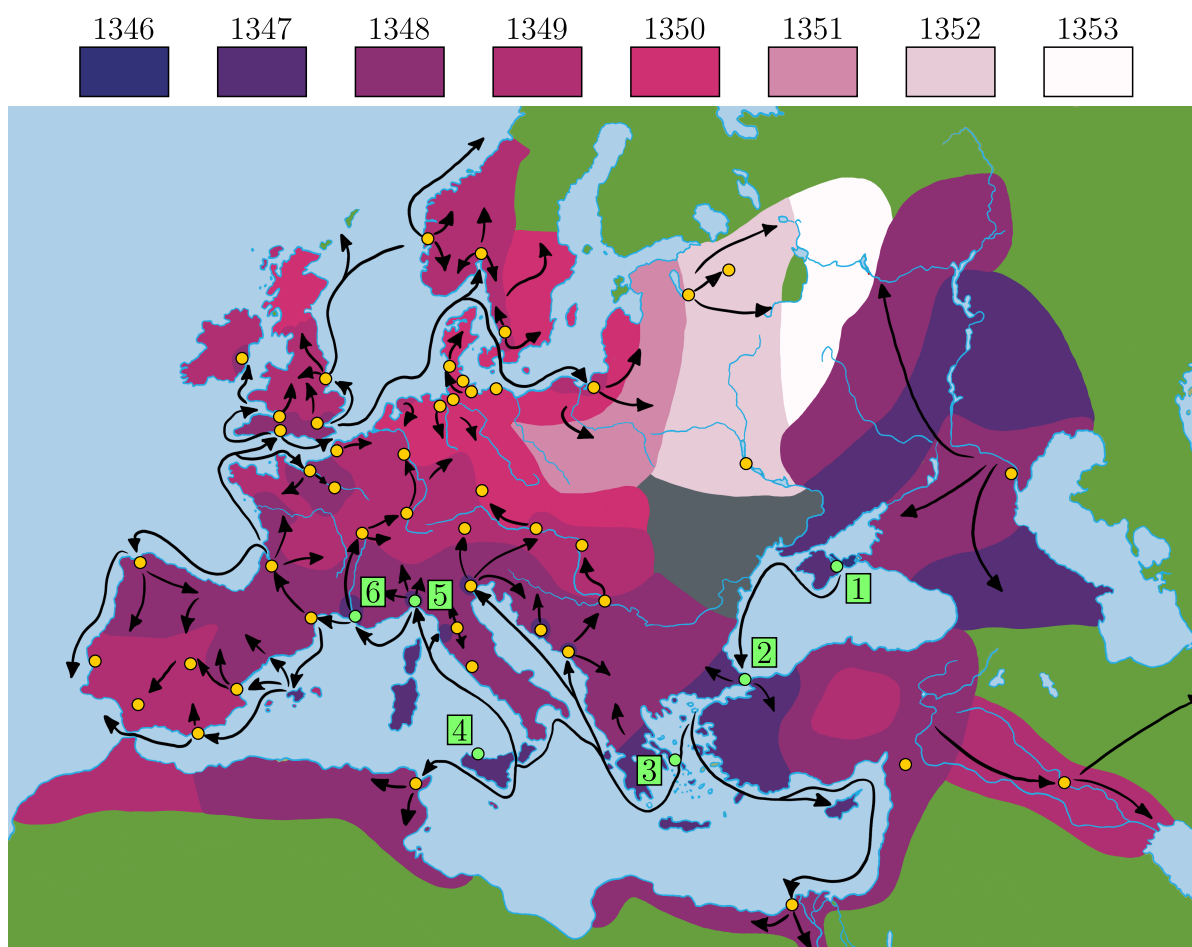


Figure 15 — Propagation de la Peste Noire entre 1346 et 1353. Les flèches noires symbolisent les flux d'individus le long de la Route de la Soie qui reliait les grandes métropoles représentées par les points jaunes (●) et verts (◉). Les premiers foyers de l'épidémie ont proliféré dans les villes de Caffa-Constantinople-Athènes-Palermo-Gênes-Marseille, contaminées et numérotées dans cet ordre sur la figure, constituant le principal axe de diffusion de la maladie.

²¹ Actuellement [Feodosiya](#) — voir aussi **1** sur la Figure 15.

- Dans les forêts de la [région d'Alberta](#) au Canada, certains exploitants d'hydrocarbures ont abattu les arbres sur des lignes de plusieurs kilomètres de long pour permettre de cartographier les gisements de pétrole sous-terrains²². L'apparition massive de ces corridors déboisés dans l'écosystème forestier²³ a eu un impact inattendu sur le comportement des loups qui y vivent. En effet, on s'est rendu compte que ces prédateurs empruntaient ces routes dénuées d'obstacles pour pouvoir se déplacer jusqu'à 2.8 fois plus vite [109] et accomplir ainsi de plus longues distances. Ce fait est problématique puisqu'on peut facilement imaginer qu'il augmente la chance des loups de rencontrer une proie dont le caribou, espèce classée vulnérable par l'UICN²⁴, fait partie [71].

Outre leur influence sur le comportement des loups, des travaux plus récents [143] ont révélé que ces couloirs dépourvus de végétation peuvent fonctionner comme des canaux pour le vent en accélérant son flux. Cette accélération du vent augmente non seulement le risque d'incendies mais peut aussi intensifier leur vitesse de propagation²⁵.

Dans le même ordre d'idées, on peut également évoquer la propagation accélérée de la chenille processionnaire du pin en France [125] ou, plus récemment, celle de la COVID-19 par l'intermédiaire des infrastructures de transport humaines [81].

Afin de modéliser et analyser l'impact de telles lignes de diffusion rapides, Henri Berestycki, Jean-Michel Roquejoffre et Luca Rossi ont introduit en 2013 [22] un système d'équations aux dérivées partielles connu aujourd'hui sous le nom "champ-route"²⁶. Ce modèle a, depuis sa création, suscité un réel engouement de la communauté²⁷.

Le modèle champ-route consiste en un système d'équations aux dérivées partielles parabolique dont les deux inconnues v et u représentent la densité d'une unique population vivant sur deux domaines de dimensions différentes. Pour $N \geq 2$, on appelle "champ" le demi-espace $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*$, tandis que le terme "route" désigne la frontière du champ, c'est-à-dire l'hyperplan \mathbb{R}^{N-1} . Pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $y > 0$, on note

- $v = v(t, x, y)$ la densité des individus dans le champ, et
- $u = u(t, x)$ la densité des individus sur la route.

L'objectif étant de modéliser une ligne de déplacement rapide au travers de la route, on impose aux individus de diffuser avec une constante de diffusivité

- d dans le champ, et

²²Des explosifs sont placés dans le sol et la mesure des fréquences des détonations permet de déterminer s'il y a du pétrole en dessous.

²³Dont on peut constater l'ampleur sur les [images satellites](#).

²⁴Union Internationale pour la Conservation de la Nature.

²⁵On se permet ici de mettre en lumière les travaux de Dietrich [52], [53] et Dietrich et Roquejoffre [54].

²⁶Field-road en anglais.

²⁷Voir [17], [18], [83], [115]–[117], [138], [128], [60], [19], [20], [2], [147], [30], [4], entre autres.

- D sur la route,

avec typiquement $D > d > 0$. Le couplage entre les inconnues v et u se produit localement à la frontière du champ. Plus précisément, pour deux constantes positives μ et ν , on impose au flux entrant dans le champ²⁸ d'être la combinaison linéaire $\mu u - \nu v|_{y=0}$ — qui peut intuitivement être traduite par “on fait entrer μu et on fait sortir $\nu v|_{y=0}$ ”. Dans un objectif de conservation de la masse de la population (on reviendra sur ce fait par la suite) le flux entrant dans le champ doit être compensé par une réaction lui étant opposée sur la route : “on fait sortir μu et on fait rentrer $\nu v|_{y=0}$ ”. Le système prend ainsi la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \mu u - \nu v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u + \nu v|_{y=0} - \mu u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (1.31)$$

que l'on munit d'une donnée initiale

$$(v_0, u_0) \text{ positive, bornée et intégrable.} \quad (1.32)$$

Remarquons qu'un abus de langage est commis dans (1.31) en écrivant Δu et Δv , qu'il faut comprendre comme $\Delta_x u$ et $(\Delta_x + \partial_{yy})v$. Comme annoncé précédemment, il est possible de montrer que le problème de Cauchy (1.32)-(1.31) préserve la masse de sa donnée initiale. Plus précisément, pour

$$M(t) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}_+^*} v(t, z, \omega) \, d\omega dz + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(t, z) \, dz,$$

on a $M(t) = M(0)$ pour tout $t > 0$. Pour remarquer ce point, il suffit de dériver M par rapport à sa variable temporelle, ce qui donne en dimension $N = 2$,

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty (d\partial_{zz}v + d\partial_{\omega\omega}v) \, d\omega dz + \int_{\mathbb{R}} (D\partial_{zz}u - \mu u + \nu v) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} (-d\partial_\omega v|_{\omega=0} - \mu u + \nu v) \, dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

où l'on présuppose que les flux asymptotiques $\partial_z v(t, z, +\infty)$, $\partial_z v(t, \pm\infty, \omega)$ et $\partial_z u(t, \pm\infty, \omega)$ sont nuls²⁹. Cette propriété de préserver la masse de la donnée initiale est particulièrement appréciable dans le cadre de la dynamique des populations puisqu'elle permet l'attribution exclusive des dynamiques observées au mouvement des individus.

Dans leur papier original [22] de 2013, Henri Berestycki, Jean-Michel Roquejoffre et Luca Rossi étudient en particulier le cas où une fonction de réaction de type Fisher-KPP est introduite dans le champ, et parviennent à démontrer que la présence de la route accélère effectivement la vitesse d'invasion dès que $D > 2d$ — voir la sous-section 1.1.7.

²⁸Ce flux s'écrit $d\partial_n v|_{y=0}$, où n représente le vecteur normal unitaire sortant, ce qui permet de le reformuler $-d\partial_y v|_{y=0}$ en raison de la géométrie commode du demi-espace.

²⁹C'est en fait une condition nécessaire et suffisante pour éliminer les solutions de type Tykhonov [140] ce qui permet par la même occasion de récupérer l'unicité des solutions classiques.

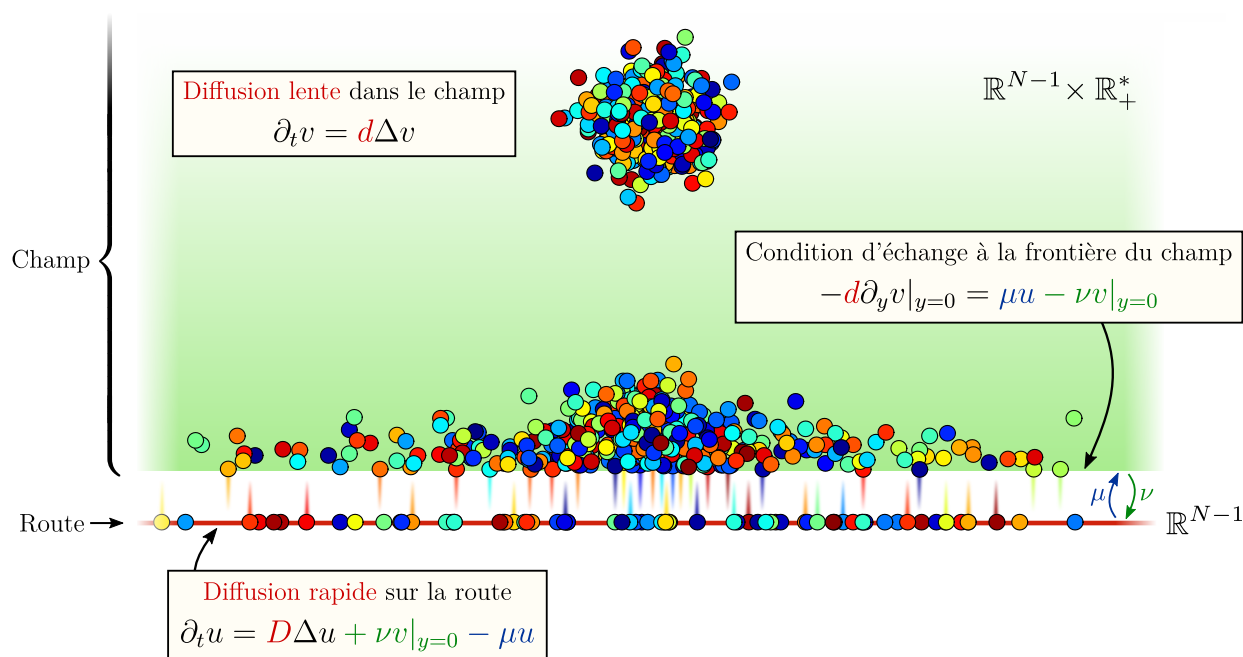


Figure 16 — Illustration heuristique de la dispersion de particules sur l'espace champ-route. Cette répartition des particules est obtenue en lâchant 1000 individus en un même point dans le champ, “loin de la route”, et 1000 autres en un même point dans le champ, “proche de la route”, puis en leur faisant subir une marche aléatoire 2-dimensionnelle dans le champ et 1-dimensionnelle sur la route telle que décrite dans la sous-section 1.1.2. Les échanges se font grossièrement avec les probabilités $\nu/(\mu + \nu)$ pour passer du champ vers la route, et $\mu/(\mu + \nu)$ pour passer de la route vers le champ. Il est important de signaler que cette simulation n’a pour objectif que d’illustrer le modèle, et que des ajustements fins seraient nécessaires pour assurer sa convergence vers la solution du problème déterministe. Le ratio parabolique imposé — voir (1.6) — n’est notamment pas l’échelle spatio-temporelle appropriée pour générer la condition d’échange, mais il sert ici à visualiser la dynamique générale du modèle.

Le modèle champ-route, autant dans son cadre purement diffusif (1.31) que combiné avec des fonctions de réaction, présente un certain nombre de difficultés provenant notamment de

- (i) la différence de dimensions entre le champ et la route,
- (ii) la géométrie en demi-espace du champ (avec la gestion du flux sur le bord),
- (iii) la condition d’échange assurant le couplage flux/réaction entre les inconnues.

Sur tout problème posé sur le système champ-route, il est ainsi pertinent de s’interroger pour savoir si l’on est capable de traiter la même question sur des problèmes fondamentalement plus simples, au sens où ils isolent ou éliminent certains des trois points (i)-(ii)-(iii)

de la liste précédente. Par exemple, en restant dans le cadre diffusif (1.31), un modèle “champ-champ”

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \mu u - \nu v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ +D\partial_y u|_{y=0} = +\nu v|_{y=0} - \mu u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad y < 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

permet d'éliminer le point (i), le système couplé “échangeur de chaleur”

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v + \mu u - \nu v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t u = D\Delta u - \mu u + \nu v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.34)$$

permet d'isoler le point (iii), ou encore la classique équation de la chaleur en demi-espace

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = -\nu v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (1.35)$$

permet d'isoler le point (ii). C'est justement ce dernier problème (1.35) dont nous allons discuter à présent puisqu'il est au point de départ de la résolution du système champ-route diffusif (1.31). Dans toute la suite le paramètre ν , qui quantifie l'intensité du flux traversant la frontière, est systématiquement choisi positif. Cela signifie, dans la condition de bord de (1.35), qu'on impose au flux d'être positivement sortant. Le cas $\nu < 0$ possède des propriétés radicalement différentes et sort du cadre de la présente discussion.

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre l'équation de la chaleur en demi-espace munie de la condition de bord de type Robin (1.35) à la frontière $\{y = 0\}$. Celle que nous présentons ici consiste à prendre la restriction d'une solution de l'équation de la chaleur sur l'espace entier \mathbb{R}^N , qu'on aura *a priori* munie d'une donnée initiale astucieuse. Cette méthode de résolution par prolongement est très classique dans les cas où les conditions de bords sont de type Neumann ou Dirichlet³⁰, où un simple prolongement pair ou impair de la donnée initiale permet de résoudre le problème. Le cas des conditions de type Robin est, quant à lui, plus astucieux, et fait l'objet de notre attention ici.

Avant de dériver les solution de (1.35) en elles-mêmes, commençons par noter la proximité des conditions de bords de type Robin avec celles de Dirichlet (où tous les individus sortent du domaine lorsqu'ils touchent la frontière) et de Neumann (où aucun individu ne sort du domaine). Compte tenu de la bijection que $\alpha \mapsto \alpha/(1 - \alpha)$ réalise de $(0, 1)$ sur \mathbb{R}_+^* , on peut, sans perte de généralité, remplacer ν par $\alpha/(1 - \alpha)$. Ceci permet de visualiser la condition de bord de type Robin (1.35) comme la combinaison convexe

$$\alpha v|_{y=0} + (1 - \alpha)(-d\partial_y v|_{y=0}) = 0,$$

qui interpole en les conditions de Dirichlet et de Neumann lorsque α parcourt l'intervalle $[0, 1]$. Il est d'ailleurs possible de visualiser graphiquement cette interpolation en dimension

³⁰Souvent donnée à titre d'exercice dans les livres abordant le sujet [126, page 55], [65, page 88].

$N = 1$: en écrivant l'équation de la tangente à la solution au point $y = 0$, on peut remarquer qu'elle s'annule systématiquement au point $y_0 = -d/\nu$, quelle que soit la valeur de $v(0)$. On peut alors interpréter la quantité de y_0 comme la position d'un *point de fuite*³¹ associé à la condition de Robin.

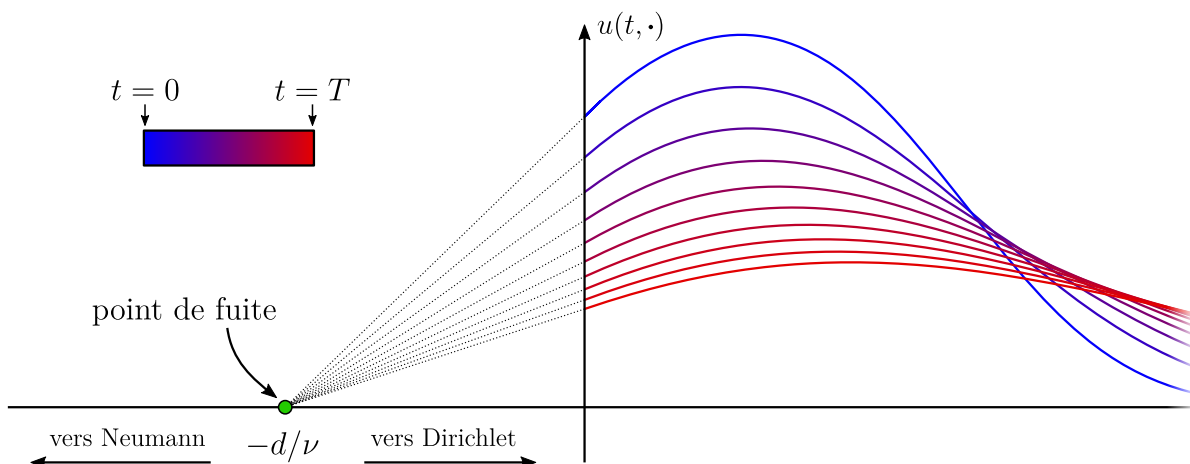


Figure 17 — Simulation d'une solution de (1.35) saisie à plusieurs instants. Il apparaît clairement que les tangentes en $y = 0$ se croisent au point de fuite représenté en vert (●). Lorsqu'on envoie ν vers 0, le point de fuite s'échappe à l'infini de sorte que toutes les tangentes se redressent et on retrouve la condition de Neumann³². À l'inverse, lorsqu'on envoie ν vers l'infini, les pentes en $y = 0$ sont de plus en plus abruptes si bien que la solution "s'accroche à l'origine" à la limite, ce qui exprime la condition de Dirichlet.

Procédons à présent à la résolution de (1.35) lorsque $N = d = 1$. En utilisant la notation "tilde" pour signaler le prolongement d'une fonction à l'espace \mathbb{R} en entier, le problème consiste donc à trouver \tilde{v}_0 de sorte que la solution \tilde{v} de

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{v} = \Delta \tilde{v}, & t > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \tilde{v}|_{t=0} \equiv \tilde{v}_0, & y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.36)$$

vérifie $-\partial_y \tilde{v}|_{y=0} = -\nu \tilde{v}|_{y=0}$ pour tout $t > 0$. Cette condition se traduit explicitement en exprimant la solution comme la convolution de la donnée \tilde{v}_0 contre le noyau de la chaleur G :

$$\int_0^\infty G(t, \omega) [\partial_y \tilde{v}_0(-\omega) + \partial_y v_0(\omega)] d\omega = \int_0^\infty G(t, \omega) [\nu \tilde{v}_0(-\omega) + \nu v_0(\omega)] d\omega,$$

pour tout $t > 0$. Ceci nous amène à écrire l'EDO linéaire suivante pour \tilde{v}_0 :

$$\partial_y \tilde{v}_0(y) - \nu \tilde{v}_0(y) = -[\partial_y v_0(-y) - \nu v_0(-y)], \quad \forall y < 0, \quad (1.37)$$

³¹Par analogie au dessin en perspective.

³²"C'est à l'horizon que toutes les parallèles se rejoignent."

et l'on peut se rassurer en remarquant qu'un prolongement pair fonctionne lorsqu'on demande une condition de Neumann sur le bord — ce qui correspond à prendre $\nu = 0$. La résolution de (1.37) donne

$$\tilde{v}_0(y) = \begin{cases} v_0(y), & \text{si } y > 0, \\ v_0(0)e^{-\nu y} - \int_0^y e^{-\nu(y-\omega)} [\partial_y v_0(-\omega) - \nu v_0(-\omega)] d\omega, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

À partir d'ici, il est possible, en détaillant la convolution de cette donnée initiale \tilde{v}_0 contre le noyau de la chaleur G , d'écrire la solution comme

$$v(t, y) = \int_{\mathbb{R}_+^*} H_\nu(t, y, \omega) \times v_0(\omega) d\omega, \quad (1.38)$$

où H_ν est connu explicitement, et représente la solution fondamentale de (1.35). On peut en particulier interpréter $H_\nu(t, y, \omega)$ comme la solution du problème au temps t et au point y , partant d'une masse de Dirac au point ω au temps initial.

La dérivation explicite des solutions de (1.35) possède un intérêt pour aborder certains problèmes de réaction-diffusion. Ce point sera discuté plus en détail dans la sous-section 1.1.8, mais essayons en quelques mots d'en esquisser les enjeux ici. Dans les modèles de réaction-diffusion posées dans des domaines non-bornés, les phénomènes réactifs et diffusifs sont dans un rapport de force :

- La partie diffusive du problème, associée au Laplacien dans le cas le plus classique, disperse les individus dans le milieu et n'a pas d'effet sur la masse totale de la population. À elle seule, elle provoque l'extinction uniforme de la population par éparpillement.
- La partie réactive, quant à elle, est associée à des termes d'ordre 0, de sorte qu'elle peut intuitivement être comparée à un problème aux dérivées ordinaires lorsqu'on l'isole. Sa positivité fait ainsi croître la densité ce qui a pour effet de prévenir la population de l'extinction.

En combinant ces deux effets antagonistes, on peut ainsi se demander si l'intensité de croissance apportée par la réaction reste suffisamment performante pour empêcher l'extinction de la population engendrée par la diffusion. Dans le cas où la réaction est de type Fisher-KPP (voir la sous-section 1.1.7), la diffusion est systématiquement dominée et toute solution non-triviale va se propager. En revanche, pour certaines réactions moins favorables au développement de la population, il est possible que la solution converge uniformément vers 0 sous l'effet dominant de la diffusion — voir la sous-section 1.1.8.

Pour pouvoir traiter ces derniers problèmes de “persistance *vs.* extinction”, il est primordial d'avoir une information sur “l'intensité d'éparpillement” de l'opérateur diffusif considéré. Un bon indicateur est le taux de décroissance uniforme des solutions, qui est le plus grand coefficient α pour lequel les solutions v du problème diffusif à donnée bornée et intégrables vérifient

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq c/t^\alpha \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Ce taux de décroissance est d'autant plus élevé que l'effet diffusif est agressif. Prenons, pour donner un exemple, l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^N . En sortant le noyau de la chaleur en suprémum de la convolution, il vient

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} / (4\pi t)^{N/2}, \quad (1.39)$$

et on identifie alors le taux de décroissance $\alpha = N/2$. On peut observer qu'à chaque incrément de dimension, la solution décroît $1/\sqrt{t}$ fois plus vite, ce qui est la conséquence des deux nouvelles possibilités de sauts apportés par la dimension ajoutée à l'échelle microscopique³³.

En connaissance du taux de décroissance de l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , il est naturel, à ce point de la discussion, de s'interroger sur l'impact de la frontière sur le taux de décroissance pour la même équation posée sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour les conditions de bord Neumann, le taux de décroissance reste, sans surprise³⁴, $\alpha = N/2$.
- Pour les conditions de bord de Dirichlet, plus agressives que celles de Neumann (puisqu'on expulse systématiquement les individus à la frontière), le taux de décroissance devient $\alpha = (N + 1)/2$. Pour une preuve de ce point, on pourra, par exemple, consulter [8].
- Enfin pour la condition de Robin³⁵, le développement ayant mené à (1.38) peut être poursuivi pour montrer³⁶ que $\alpha = (N + 1)/2$ comme dans le cas Dirichlet. Ce point est démontré au Chapitre 3, dans la preuve du Théorème 3.3.

On pourra retenir que la moindre perte d'individus à la frontière fait que la solution décroît comme si elle vivait dans la dimension supérieure.

1.1.5 Naissances et morts : quelques modèles EDO

Dans cette sous-section, nous allons discuter de quelques Équations Différentielles Ordinaires (EDO) classiquement utilisées pour décrire la croissance en dynamique des populations. Ce qui suit est très classique, voir par exemple [126] ou [119]. On considère, dans cette partie, une population structurée en temps continu dont on notera la taille $U(t)$, évoluant sous l'action d'une EDO autonome

$$U' = f(U), \quad t > 0,$$

³³On pourra aussi noter au passage que la convergence de l'intégrale en temps long du membre de droite de (1.39) (divergente si $N \leq 2$ et convergente si $N > 3$) est étroitement liée à la récurrence/transience des marches aléatoires sur \mathbb{Z}^N .

³⁴Au regard de la méthode de résolution par prolongement pair.

³⁵Où, rappelons-le, on impose au flux d'être positivement sortant — voir la remarque sur le signe de ν sous (1.35).

³⁶En utilisant notamment des asymptotiques sur la fonction d'erreur complémentaire $\text{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-z^2} dz$ qui apparaît dans la solution fondamentale H_ν décrite en dessous de (1.38).

où la fonction de croissance f est nulle pour $N = 0$ et choisie “suffisamment régulière”, de sorte à écarter tout problème d’existence locale ou d’unicité.

Le modèle de Malthus Un des premiers modèles de croissance de population répertorié a été celui que l’économiste britannique Thomas Robert Malthus développa dans son essai de 1798 [107]. Ce modèle présuppose que la population évolue à taux constant et indépendamment de sa taille, prenant ainsi la forme

$$U' = rU, \quad t > 0, \quad (1.40)$$

où la constante r peut s’interpréter comme un bilan entre les taux de natalité et de mortalité. Bien qu’il puisse sembler réaliste pour les petites populations, la croissance exponentielle de U engendrée par cette évolution linéaire montre que le modèle de Malthus est trop simple pour décrire fidèlement la réalité. En effet, la quantité de ressources étant en général limitée dans la nature, une compétition entre les individus s’instaure et devient de plus en plus pesante à mesure que U grandit. L’idée originale et pessimiste qu’avait Malthus était que la population humaine allait inévitablement être confrontée à cette croissance exponentielle qu’il observait lui-même empiriquement, et, tandis que les ressources ne pouvaient quant à elles que croître linéairement, l’humanité était vouée à connaître la famine.

Le modèle de Verhulst Le modèle que le mathématicien belge Pierre-François Verhulst introduisit en 1838 [131], [49], soit quatre décennies après l’essai de Malthus, a été un des premiers à prendre en compte le phénomène de compétition intraspécifique — i.e. au sein de la population elle-même. En ajoutant une pénalisation quadratique au modèle linéaire proposé par Malthus, Verhulst remarqua que le modèle préservait les mêmes propriétés de croissance lorsque la population était faible, mais que la partie quadratique de l’évolution l’emportait sur la partie linéaire lorsque U devenait suffisamment grand — voir la Figure 18. L’équation d’évolution du modèle de Verhulst s’écrit ainsi de la manière suivante

$$U' = rU(1 - U), \quad t > 0. \quad (1.41)$$

Cette pénalisation quadratique enrichit considérablement le modèle puis qu’elle permet finalement à la population de se réguler par elle-même tout en préservant une structure polynomiale simple pour la fonction de croissance, bien connue aujourd’hui sous le nom de *croissance logistique*³⁷. On pourra enfin remarquer que (1.41) se résout explicitement par séparation des variables :

$$U(t) = \frac{ke^{rt}}{1 + ke^{rt}} = 1 - \frac{1}{1 + ke^{rt}}, \quad \text{avec } k := U(0)/(1 - U(0)),$$

³⁷C’est Verhulst qui initialement nomma de sa propre initiative “courbes logistiques” celles dont l’évolution était régie par (1.41). La raison de l’emploi de ce terme spécifique n’est pas explicitement documentée. Une hypothèse est que Verhulst semblait qualifier de “logarithmique” les fonctions, qui, pour nous, sont exponentielles — voir la Figure 2 dans [49]. On peut donc imaginer que le terme trouve sa raison dans la relative proximité que présente la courbe logistique avec la courbe de croissance Malthusienne pour les faibles valeurs de U .

et tend en temps long vers 1 comme suggéré par le membre le plus à droite de (1.41). Cet équilibre asymptotique porte le nom de *capacité d'accueil*³⁸ et peut potentiellement s'ajuster pour les besoins de la modélisation.

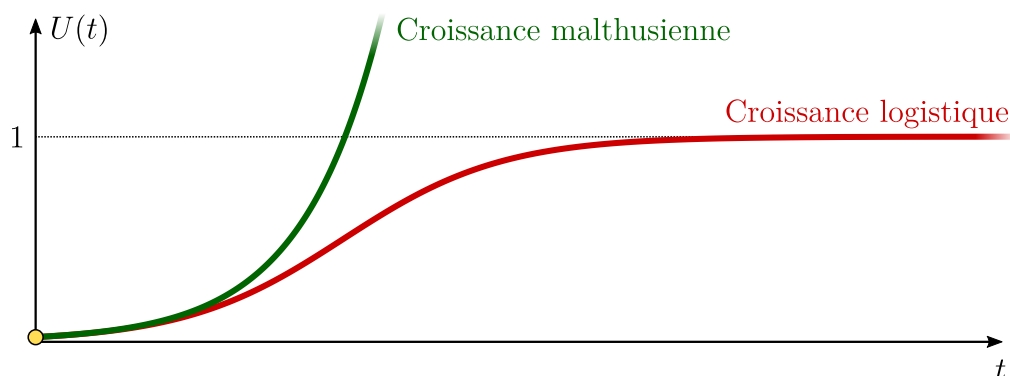


Figure 18 — Superposition de deux croissances exponentielle et logistique, solutions respectives de (1.40) et (1.41), partant d'une même valeur initiale.

Les modèles à effet Allee En continuant de chercher à capturer de nouveaux phénomènes encore plus fins dans la modélisation, on peut envisager l'introduction d'un effet Allee³⁹ [10], [41]. Cet effet consiste à dire que le taux de croissance rapporté à l'échelle individuelle

$$\tau_f(U) := \begin{cases} f(U)/U & \text{si } U > 0, \\ f'(0) & \text{si } U = 0, \end{cases} \quad (1.42)$$

qui était constant dans le cas Malthusien et affine décroissant dans le logistique, n'est plus maximal pour $U = 0$. L'effet Allee traduit une certaine difficulté de la population à croître lorsque qu'elle se trouve en faible effectif, ceci pouvant être dû à

- de la consanguinité,
- une difficulté à trouver un partenaire,
- une moins bonne résistance aux phénomènes climatiques extrêmes⁴⁰,
- le manque d'un groupe pour la défense ou la chasse coopérative.

Il existe plusieurs manières de pénaliser les petites populations au travers de la fonction de croissance f . On peut avant tout les classer en deux groupes (certes discutables) d'intensité : faible si $f'(0) \geq 0$, et fort si $f'(0) < 0$. Pour initier un effet Allee faible, on

³⁸Carrying capacity, en anglais.

³⁹Nommé ainsi en mémoire du zoologiste américain Warder Clyde Allee qui a été le premier à décrire le phénomène en 1931.

⁴⁰On peut penser aux manchots pour cet exemple.

1.1. Contexte et motivations

peut partir de la croissance logistique donnée par (1.41) et délinéariser l'équilibre instable 0 en élevant le premier U à une puissance sur-linéaire :

$$U' = rU^{1+p}(1 - U), \quad t > 0, \quad (1.43)$$

où p est une constante positive dont la grandeur intensifie l'effet Allee. En faisant ceci, le modèle dégénéré (1.43) se comporte, pour les valeurs de U au voisinage proche de 0, essentiellement comme $U' = rU^{1+p}$, c'est-à-dire qu'on a, pour une petite valeur initiale $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$U(t) \approx \left(\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon^p} - rpt} \right)^{1/p} = \varepsilon(1 + r\varepsilon^p t + o(t)). \quad (1.44)$$

Ceci est à comparer avec le modèle logistique qui, quant à lui, se comporte comme $U' = rU$ pour les petites valeurs de U :

$$U(t) \approx \varepsilon e^{rt} = \varepsilon(1 + rt + o(t)). \quad (1.45)$$

On peut observer que la différence entre (1.44) et (1.45) est en réalité assez mince et se joue uniquement sur les constantes dans le développement au premier ordre. Remarquons notamment la présence sur-linéaire de la donnée initiale ε^p devant le t dans le second membre de (1.44) qui, bien qu'elle ait peu d'influence pour le modèle EDO, va jouer un rôle primordial à l'ajout d'un Laplacien⁴¹.

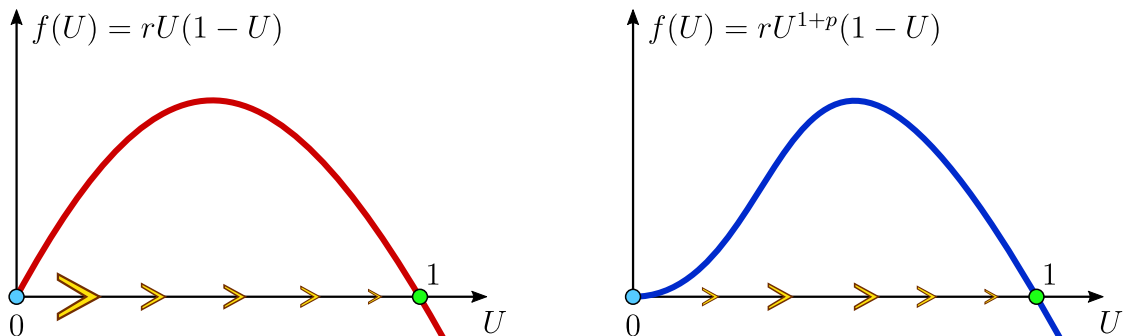


Figure 19 — Comparaison des fonctions de croissance logistique (à gauche) et monostable dégénérée (à droite). Dans les deux cas, les solutions positives qu'elles engendrent vont toutes converger vers l'équilibre 1 qui représente la capacité d'accueil. Ceci étant dit, les solutions à petite valeur initiale auront plus de mal à s'échapper de l'influence de l'équilibre nul dans le cas dégénéré.

Il existe plusieurs façons d'introduire un effet Allee fort sur la fonction de croissance. L'une d'elles consiste, en partant de la croissance logistique, à placer un équilibre instable θ entre les équilibres 0 et 1, de sorte que 0 devient à présent un état stable :

$$U' = rU(1 - U)(U - \theta), \quad t > 0. \quad (1.46)$$

⁴¹Le phénomène diffusif a tendance à "tirer" ε vers 0 à la vitesse $c/t^{N/2}$ (cf. le contrôle (1.39)). On peut pressentir ici le rapport de force algébrique qui va se faire entre les parties réactives et diffusives. Cet aspect est détaillé dans la sous-section 1.1.8.

La fonction de croissance $f(U) = rU(1-U)(U-\theta)$ dans (1.46) est qualifiée de *bistable* en raison de ces deux équilibres stables 0 et 1. Le troisième équilibre, θ , joue le rôle d'un seuil :

- si $U(0) < \theta$, alors U va converger vers 0,
- si $U(0) > \theta$, alors U va converger vers 1.

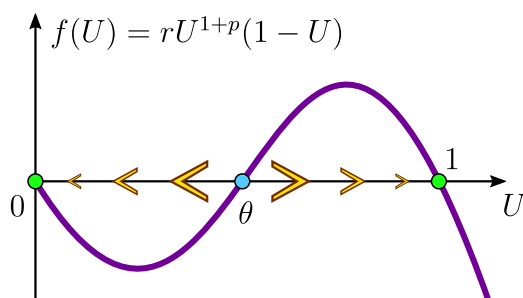


Figure 20 — Illustration d'une fonction de croissance bistable et des deux dynamiques qu'elle implique, suivant si la valeur initiale est plus grande ou plus petite que l'équilibre instable θ .

1.1.6 Équations de réaction-diffusion : cadre général

Les deux sous-sections 1.1.7 et 1.1.8 qui vont suivre celle-ci abordent des problématiques concernant les équations de réaction-diffusion posées dans l'espace \mathbb{R}^N . On s'intéressera notamment aux propriétés d'invasion avec propagation, d'invasion/extinction et d'explosion/extinction. Avant d'entrer dans les détails, on énonce ici quelques principes et outils généraux dans le contexte de ces équations qui vont constituer une base pour nous permettre d'aborder ces problèmes qualitatifs. Dans ce qui suit, on considère donc l'équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u = \Delta u + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.47)$$

où la fonction f est choisie "suffisamment régulière" et vérifiant $f(0) = 0$.

Existence L'existence des solutions (au moins locales en temps) de l'équation (1.47) munie d'une donnée initiale $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in [1, \infty]$ s'obtient, comme dans le cadre des EDO, par l'utilisation de théorème de point fixe sur un problème légèrement affaibli (mild) :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} [f(u(s))] ds, \quad (1.48)$$

Dans ce qui précède, $e^{t\Delta}\varphi$ représente l'action du semi-groupe associé à l'équation de la chaleur $\partial_t = \Delta$ sur la donnée $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ évaluée au temps t , et qui peut s'écrire comme la convolution du noyau de la chaleur $G(t, x) = e^{-x^2/4t}/(4\pi t)^{N/2}$ contre φ . On peut voir (1.48) comme un principe de Duhamel [65, page 49], [82, page 154], où la source est la

solution elle-même. Cette équation implicite peut être établie en quelques lignes : pour $0 \leq s \leq t$, on pose “l’interpolation” entre u et la solution du problème linéaire associé

$$\Psi(s) := e^{(t-s)\Delta} u(s).$$

On peut maintenant écrire

$$u(t) - e^{t\Delta} u_0 = \Psi(t) - \Psi(0) = \int_0^t \partial_s \Psi(s) ds. \quad (1.49)$$

En explicitant $\partial_s \Psi(s)$, il vient⁴²

$$\begin{aligned} \partial_s \Psi(s) &= -e^{(t-s)\Delta} [\Delta u(s)] + e^{(t-s)\Delta} [\partial_s u(s)] \\ &\stackrel{(1.47)}{=} -e^{(t-s)\Delta} [\Delta u(s)] + e^{(t-s)\Delta} [\Delta u(s) + f(u(s))] \\ &= e^{(t-s)\Delta} [f(u(s))], \end{aligned}$$

qu’on injecte dans (1.49) pour produire (1.48).

Le caractère localement lipschitzien de f permet d’appliquer des théorèmes de points fixes et fabriquer une solution temporellement maximale, comme mentionné plus haut. Bien que la solution ainsi construite ne soit *a priori* “que” faible au sens mild, des estimations *a posteriori* peuvent établir que cette solution est en fait classique.

Principe de comparaison et unicité On introduit à présent la notion de principe de comparaison qui est un outil incontournable dans l’étude qualitative des équations de réaction diffusion. Commençons par définir les termes de sur- et de sous-solutions.

Définition 1.6 (Sur/sous-solutions) *Soit un horizon temporel $T > 0$.*

On dit qu’une fonction $\bar{u} = \bar{u}(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ est une sur-solution de (1.47) si

$$\partial_t \bar{u} \geq \Delta \bar{u} + f(\bar{u}).$$

De même, on dit que $\underline{u} = \underline{u}(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ est une sous-solution de (1.47) si

$$\partial_t \underline{u} \leq \Delta \underline{u} + f(\underline{u}).$$

On pourra en particulier noter que toute solution de (1.47) est en particulier à la fois une sur- et une sous-solution. Muni de ces définitions, on peut maintenant énoncer le principe de comparaison⁴³ qui est le suivant.

⁴² $\Psi(s) = e^{(t-s)\Delta} u(s)$ se dérive “comme un produit” — on peut écrire la limite du taux d’accroissement pour s’en persuader.

⁴³Il est courant de voir écrite l’expression “par comparaison” pour appeler ce principe.

Théorème 1.7 (Principe de comparaison) *Soient \bar{u} et \underline{u} une sur- et une sous-solution bornées⁴⁴ de l'équation (1.47) au sens de la Définition 1.6.*

- (Comparaison large) *Si $\underline{u}|_{t=0} \leq \bar{u}|_{t=0}$, alors $\underline{u} \leq \bar{u}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^N$.*
- (Comparaison stricte) *Si $\underline{u}|_{t=0} < \bar{u}|_{t=0}$, alors $\underline{u} < \bar{u}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^N$.*

Les premières applications du Théorème 1.7 sont immédiates :

- (Unicité) Si u et v sont solutions de (1.47) partant de la même donnée initiale, alors en appliquant deux fois le principe de comparaison, on trouve $u \leq v$ et $v \leq u$, ce qui établit l'unicité.
- (Solutions globales) Si $a < b$ sont deux racines de f , et si $a < u_0 < b$, alors $a < u < b$. Ceci prévient en particulier l'explosion de u ce qui la rend globale — puisque f est globalement lipschitzienne sur le compact $[a, b]$.
- (Se ramener à des EDO) Dans un cadre plus large, si a_0 et b_0 sont deux réels tels que $a_0 \leq u_0 \leq b_0$, alors

$$a(t) \leq u(t, x) \leq b(t), \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R},$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont les solutions des EDO $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ partant des valeurs initiales a_0 et b_0 respectivement.

Dans les sous-sections qui suivent, toutes les données initiales sont prises dans

$$L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N),$$

sauf mention du contraire.

1.1.7 Équation de Fisher-KPP

On s'intéresse dans cette sous-section à la classique équation de Fisher-KPP nommée ainsi en l'honneur de Fisher [72] et de Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov [95] qui l'introduirent indépendamment en 1937. Dans cette sous-section, on se place en dimension $N = 1$. L'équation de Fisher-KPP s'écrit

$$\partial_t u = \Delta u + u(1 - u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.50)$$

et trouve nombre d'applications en dynamique des populations, écologie ou épidémiologie. La simulation numérique suivante semble une bonne entrée dans la matière.

⁴⁴Ou, au moins, croissant au plus comme un $e^{\alpha x^2}$.

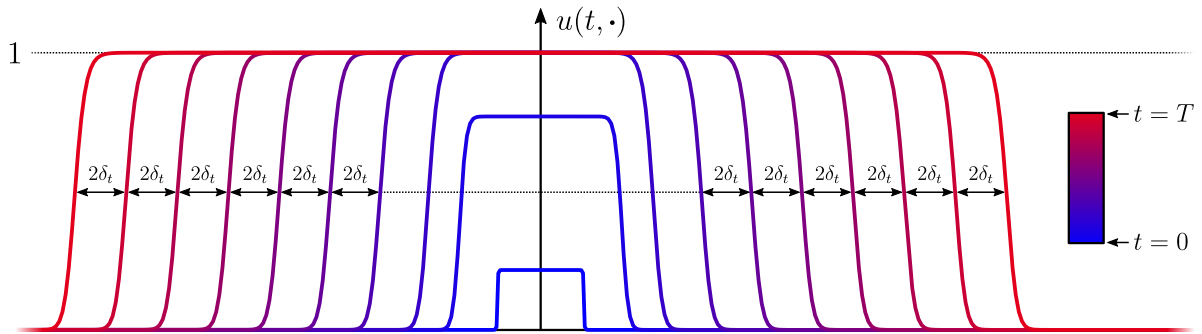


Figure 21 — Simulation de l'équation de Fisher-KPP (1.50) partant d'une marche pour donnée initiale. Les instantanés sont pris à intervalles de temps réguliers δ_t .

Plusieurs observations émergent de la Figure 21 :

- (HTE) La solution semble converger localement uniformément vers 1 qui est l'équilibre stable de l'EDO logistique sous-jacente — cf. (1.41).
- (TW) La forme de la solution semble se stabiliser sur celle d'une marche qui s'élargit.
- (S) En suivant l'ensemble de niveau $\{u = 1/2\}$, il apparaît que la vitesse de cette invasion semble converger vers la valeur $c = 2$.

Avant d'entrer dans le détail de ces remarques, notons que l'équation (1.50), d'apparence spécifique, est en fait très générale. Tout d'abord, par le simple changement de variable $v(t, x) := Ku(rt, \sqrt{\frac{r}{d}} x)$, où $d, r, K > 0$, on peut élargir l'étude de l'équation à

$$\partial_t v = d\Delta v + rv(1 - v/K), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.51)$$

Ensuite, il est possible, à partir de (1.51) de généraliser les propriétés que l'on va aborder ci-dessous à la large famille des fonctions de réaction de *type KPP*:

Définition 1.8 (Réactions de type KPP) *On dit qu'une fonction de réaction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 est de type KPP si*

- $f(u)$ est strictement positif si $u \in (0, 1)$, négatif sinon (confinement dans $[0, 1]$),
- $f(0) = f(1) = 0$ (0 et 1 sont deux équilibres),
- $f(u)/u \leq f'(0)$ pour tout $0 < u \leq 1$ (croissance optimale à faible densité).

Notons que les non-linéarités strictement concaves vérifiant le second point sont systématiquement de type KPP.

Pour étendre les résultats propagatifs de (1.51) aux réactions de type KPP, on peut travailler par comparaison en jouant sur la constance r comme suggéré sur la figure suivante.

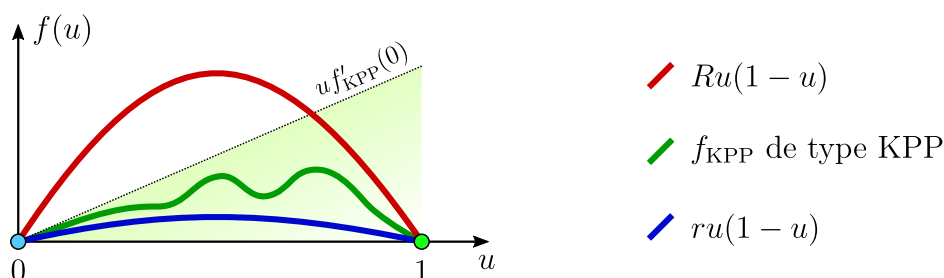


Figure 22 — Encadrement d'une réaction de type KPP entre deux logistiques.

Hair Trigger Effect (HTE) Le point (HTE) stipule que toute perturbation positive de l'état trivial $\equiv 0$ entraîne la convergence locale uniforme vers $\equiv 1$ en temps long. Ce résultat s'établit en glissant une certaine donnée initiale \underline{u}_0 sous u_0 puis en montrant que la solution \underline{u} émergeant de \underline{u}_0 converge vers 1. Plus précisément, on prend cette sous-donnée initiale du type

$$\underline{u}_0(x) = \begin{cases} \varepsilon \varphi_L(x) & \text{si } -L < x < L, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où φ_L est une fonction propre principale positive du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur l'intervalle $(-L, L)$, et où L et ε sont pris suffisamment petits pour avoir $\underline{u}_0 \leq u_0$. En notant alors \underline{u} la solution partant de la donnée \underline{u}_0 comme mentionné plus haut, on peut montrer, en utilisant la propriété de fonction propre de φ_L , que \underline{u} est ponctuellement croissante et bornée par 1, donc convergente — disons vers $p = p(x)$. Il s'agit enfin de “passer à la limite dans l'équation (1.50)”⁴⁵ pour pouvoir dire que p vérifie l'équation elliptique $\Delta p + p(1 - p) = 0$, dont l'unique solution non-triviale et bornée par 1 est identiquement 1⁴⁶.

Construction de fronts progressifs (TW)⁴⁷ En regardant l'évolution typique de la solution sur la Figure 21, une idée naturelle est d'essayer de voir s'il existe des solutions positives, translatantes, et reliant l'équilibre stable 1 à l'équilibre instable 0. Pour formaliser ceci, on cherche, pour $c > 0$, $\varphi_c = \varphi_c(t, x) = \varphi_c(x - ct)$ tel que

$$\begin{cases} \varphi_c(z) \rightarrow 1 & \text{lorsque } z \rightarrow -\infty, \\ \varphi_c(z) \rightarrow 0 & \text{lorsque } z \rightarrow +\infty, \\ \varphi_c(z) \geq 0 & \forall z \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.52)$$

et vérifiant (1.50) qui devient, compte tenu de la structure spatio-temporelle que possède φ_c , l'EDO suivante :

$$\varphi'' + c\varphi' + \varphi(1 - \varphi) = 0. \quad (1.53)$$

⁴⁵En prenant la précaution d'affiner le mode de convergence de ponctuel à local uniforme en utilisant des estimations paraboliques.

⁴⁶On peut montrer ce point par l'absurde en utilisant des arguments de convexité.

⁴⁷Traveling waves, en anglais.

L'EDO du second ordre (1.53) se ramène classiquement à un système de deux EDO du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi'_c \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi'_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_c^2 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_c - 1 \\ \varphi'_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (\varphi_c - 1)^2 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

dont les deux équilibres sont

$$\begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions (1.52) demandées pour φ_c se traduisent par la recherche d'une trajectoire sur le plan de phase (φ_c, φ'_c) reliant l'équilibre $(1, 0)$ à l'équilibre $(0, 0)$ dans le demi-plan $\{\varphi_c > 0\}$. En réalisant l'étude spectrale des évolutions linéarisées au voisinage de ces deux équilibres (cf. les deux matrices dans (1.54) et (1.55)), on peut tout d'abord voir que $(1, 0)$ est un point col dont la direction instable est dans le cône sud-ouest/nord-est. Ensuite, en ce qui concerne l'équilibre $(0, 0)$, il faut différencier les cas en fonction des valeurs de c . Pour cela, notons que la matrice du linéarisé en $(0, 0)$ (cf. (1.54)) admet pour équation caractéristique

$$\chi^2 + c\chi + 1 = 0, \quad (1.56)$$

dont le discriminant est donné par $\Delta = c^2 - 4$. On peut tout d'abord vérifier que les racines de (1.56) sont à valeurs réelles strictement négatives pour tout $c > 0$, ce qui rend l'origine systématiquement attractive.

- Si $c < 2$, alors l'équation (1.56) possède deux racines complexes qui font que la trajectoire du point (φ_c, φ'_c) va inévitablement orbiter autour de l'origine et notamment passer dans le demi-plan $\{\varphi_c < 0\}$ — cf. la partie supérieure de la Figure 23.
- Si $c \geq 2$, alors les racines de (1.56) sont réelles et négatives, et une des deux directions stables de l'équilibre $(0, 0)$ se situe dans le cône nord-ouest/sud-est. Il est alors possible de montrer que la trajectoire reliant l'équilibre $(1, 0)$ à l'équilibre $(0, 0)$ reste confinée dans le cadran sud-est du plan de phases — cf. la partie inférieure de la Figure 23.

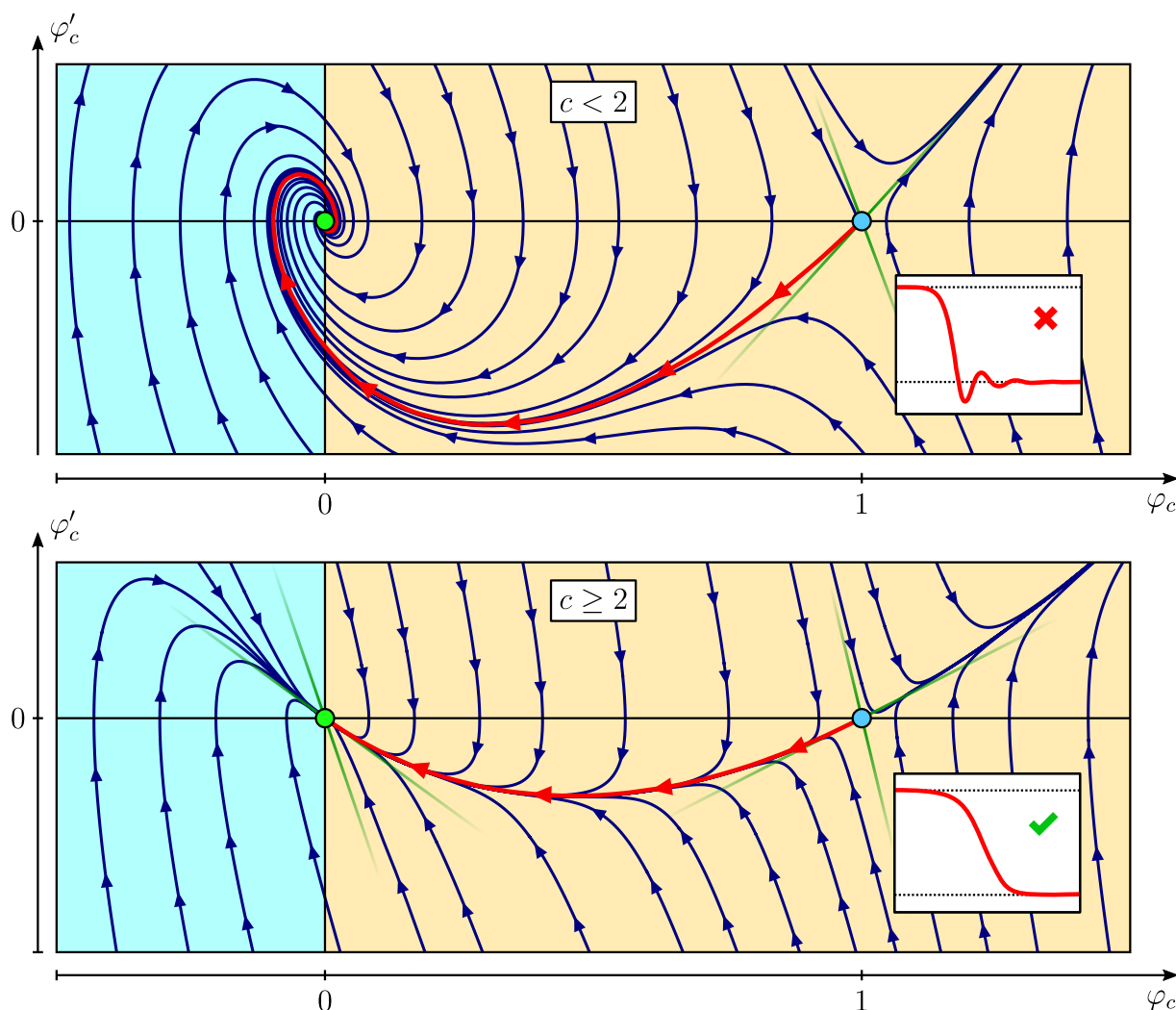


Figure 23 — Plan de phase émergeant de l'ansatz $\varphi_c(t, x) = \varphi_c(x - ct)$ dans l'équation de Fisher-KPP (1.50). Les lignes vertes représentent les sous-espaces propres des linéarisés aux points d'équilibres.

Ces considérations permettent d'écrire le résultat suivant :

Théorème 1.9 (Existence de fronts progressifs) *Pour $c \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un front $\varphi_c(t, x) = \varphi_c(x - ct)$ pour l'équation de Fisher-KPP (1.50) vérifiant les propriétés (1.52) si, et seulement si, $c \geq 2$.*

Par ailleurs, pour tout $c \geq 2$, le front φ_c est unique (modulo translations), décroissant, et

- $\varphi_c(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} k_c z e^{-z\lambda_c}$ si $c = 2$ (front critique),
- $\varphi_c(z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} k_c e^{-z\lambda_c}$ si $c > 2$ (front sur-critique),

1.1. Contexte et motivations

pour $\lambda_c := (c - \sqrt{c^2 - 4})/2$ et certaines constantes $k_c > 0$.

On pourra remarquer que le poids λ_c des queues des φ_c est une fonction décroissante de c qui s'inverse en $c_\lambda = \lambda + 1/\lambda$. Autrement dit, plus la queue est lourde (λ petit), et plus l'invasion est rapide (c grand) — cf. la Figure 24. On peut alors voir que c'est la vitesse de décroissance à l'avant du front qui détermine sa vitesse — on parle de fronts “tirés”. Cette propriété bien connue des fronts de l'équation de Fisher-KPP provient de la forte instabilité de l'équilibre 0 : l'hypothèse KPP (cf. dernier point de la Définition 1.8) force le taux de croissance individuel (1.42) à être maximal pour $u = 0$.

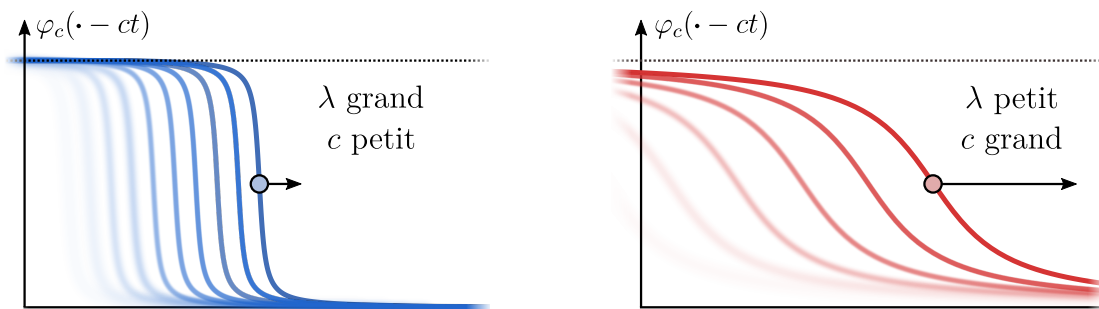


Figure 24 — Comparaison des vitesses de propagation entre un front à queue légère (à gauche) et un front à queue lourde (à droite).

Dans la suite, on note c^* la vitesse minimale, et λ^* le poids de la queue qui lui est associée :

$$c^* := 2 \quad \text{et} \quad \lambda^* := 1. \quad (1.57)$$

Vitesse d'invasion des solutions à données “front-like” (S) Dans ce qui précède, nous avons vu que les fonctions d'une certaine famille (les fronts progressifs $(\varphi_c)_{c \geq 2}$) se propagent à vitesse constante sous l'évolution de l'équation de Fisher-KPP (1.50). Cette propriété propagative est en réalité assez robuste, puisqu'elle reste vraie si la donnée initiale “ressemble à un front”. Ce point est l'objet de la discussion du présent paragraphe. Commençons par rigoureusement définir cette notion de “ressemblance à un front”.

Définition 1.10 (Donnée front-like) *On dit qu'une donnée uniformément continue $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est front-like si*

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) > 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x).$$

En particulier, les fronts φ_c sont front-like.

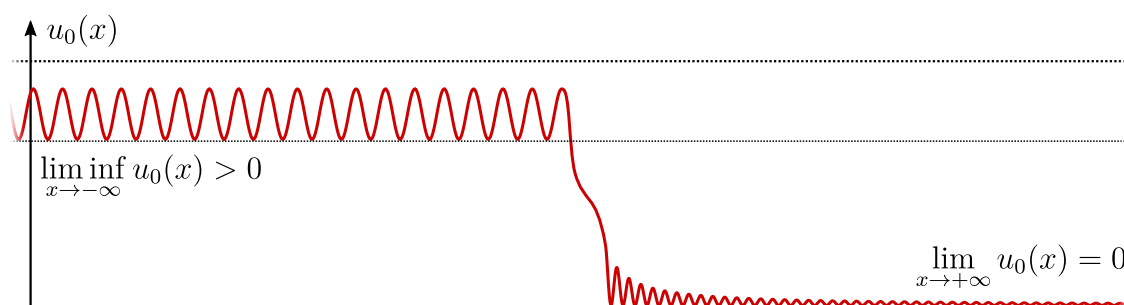


Figure 25 — Un exemple de donnée u_0 front-like.

Prenons à présent u_0 front-like et telle que, pour λ donné positif, $u_0 = O(e^{-\lambda x})$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Dans ce cas l'invasion ne peut pas se propager plus vite que

$$\begin{cases} c = \lambda + 1/\lambda > c^* & \text{si } 0 < \lambda < \lambda^*, \\ c = c^* & \text{si } \lambda \geq \lambda^*. \end{cases}$$

Pour voir ceci, on cherche une sur-solution de la forme $\bar{u}(t, x) = e^{-\lambda(x-ct-\xi)}$. En éliminant la partie non-linéaire de l'opérateur KPP (1.50) au travers d'une inégalité⁴⁸, il vient la relation de dispersion

$$c \geq \lambda + \frac{1}{\lambda}.$$

Un candidat pour la vitesse minimale serait donc $c = \lambda + \frac{1}{\lambda}$, et c'est effectivement le cas quand $\lambda \in (0, 1)$. Lorsque $\lambda \geq \lambda^*$, la donnée initiale peut en réalité être majorée par l'exponentielle critique $e^{\xi - \lambda^* x}$ (puisque sa queue est plus lourde que celle de u_0) si bien que la solution u émergeant de u_0 ne peut pas aller plus vite que c^* .

Un contrôle par-dessous des solutions, plus difficile à obtenir, permet de montrer que cette estimation de vitesse est en fait optimale. Cela dit, on a un résultat bien plus fort : les fronts progressifs décrivent uniformément bien les solutions en temps long de l'équation de Fisher-KPP (1.50) munie de données front-like à queue exponentielle :

Théorème 1.11 (KPP sur des données front-like exponentiellement décroissantes)
Supposons que u_0 est front-like au sens de la Définition 1.10, et telle que $u_0(x) \sim e^{-\lambda x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ pour un certain $\lambda > 0$.

- Si $\lambda \in (0, \lambda^*)$, alors il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - \varphi_c(\cdot - ct + \xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0,$$

pour $c = \lambda + 1/\lambda$.

⁴⁸Ce qui montre au passage que c'est bien le linéarisé en $u = 0$ qui régit la vitesse minimale.

- Si $\lambda \geq \lambda^*$, alors il existe $\xi = \xi(t) = O(\ln(t))$ lorsque $t \rightarrow \infty$, tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - \varphi_{c^*}(\cdot - c^*t + \xi(t))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Le premier point du Théorème 1.11 est démontré dans [141] et [106]. Le second point trouve sa preuve originale dans les célèbres travaux de Bramson au début des années 80 qui propose une approche stochastique du problème, [34], [33]. Ceci a valu le nom de “Bramson delay” à cette dérive logarithmique $\xi(t)$ de la solution par rapport au front. Une démonstration avec des arguments déterministes a également été fournie plus récemment [85].

Accélération d’invasions On pourra noter que le Théorème 1.11 ne concerne que les données front-like à queues exponentielles. Lorsque la donnée possède une queue lourde, au sens où elle décroît plus vite que toute exponentielle⁴⁹, on peut construire une famille de sous-solutions à queues exponentielles de plus en plus lourdes (et donc rapides), si bien qu’il apparaît que les solutions se propagent à une vitesse grandissante : il y a accélération. Ce phénomène est étudié en détail dans [86] et [88]. Pour des variantes prenant en compte différents opérateurs diffusifs, on peut se référer à [79] et [5] pour la diffusion intégral-différentielle, ainsi qu’à [36] pour la diffusion fractionnaire. D’un point de vue spatio-évolutif, la question de l’accélération des solutions le long d’un gradient environnemental est abordée dans [118]. On peut enfin mentionner les modèles étudiés dans [16], [31], [32], où l’invasion accélérée est cette fois-ci due à un coefficient de diffusion spatial dépendant du trait phénotypique. Ces derniers modèles permettent notamment d’expliquer l’invasion accélérée du crapaud buffle en Australie [121].

1.1.8 Effet Allee faible et phénomènes d’explosion de Fujita

Bien que l’invasion du milieu soit systématique pour l’équation de Fisher-KPP (1.50), il n’en va pas de même pour toutes les équations de réaction diffusion dans \mathbb{R}^N . Comme on l’a brièvement mentionné plus haut, le phénomène diffusif apporté par le Laplacien a tendance à faire décroître la densité en éparpillant les individus. La fonction de réaction, quant à elle, a tendance à faire augmenter la densité. Ce rapport de force est en faveur de la réaction lorsque cette dernière est de type KPP (cf. la Définition 1.8), étant donné que ces réactions sont d’autant plus performantes que la densité est faible⁵⁰. Ainsi, la petitesse de la solution sert dans ce cas de tremplin à la réaction, ce qui rend l’équilibre nul fortement instable.

Lorsqu’un effet Allee est introduit dans la réaction⁵¹, il est possible d’observer des extinctions de populations. En effet, prenons pour un premier exemple l’équation de réaction-

⁴⁹i.e. $u_0(x)e^{\varepsilon x}$ explose lorsque $x \rightarrow \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

⁵⁰Rappelons que l’hypothèse KPP demande que le taux de croissance individuel (1.42) soit maximal lorsque la densité est faible.

⁵¹Cet effet est antagoniste à l’hypothèse KPP : le taux de croissance individuel (1.42) n’est plus maximal lorsque la densité est faible.

diffusion bistable

$$\partial_t u = \Delta u + u(1-u)(u-1/2), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Il est clair que toute solution de ce problème partant d'une donnée initiale strictement inférieure à $1/2$ va disparaître uniformément, écrasée par une solution de l'EDO sous-jacente. Cette question d'exhiber des solutions non persistantes est moins évidente lorsqu'on prend une équation de réaction-diffusion monostable dégénérée du type

$$\partial_t u = \Delta u + u^{1+p}(1-u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.58)$$

où, rappelons-le, $p > 0$ est un paramètre d'intensité de l'effet Allee. Notons qu'en prenant $p = 0$ on retombe sur la réaction logistique $u(1-u)$, à l'origine des réactions de type KPP, ce qui souligne une certaine proximité entre ces équations et (1.58) : on s'attend à avoir de la "continuité" par rapport à p dans le comportement des solutions. Dans le cas de (1.58), la comparaison avec l'EDO sous-jacente qui fonctionnait dans le cas bistable tombe à l'eau puisque toutes ses solutions strictement positives convergent vers 1. Ceci étant dit, le développement limité en $t = 0$ de la solution de $U' = U^{1+p}$ partant d'une valeur initiale ε , à savoir

$$U(t) = \varepsilon(1 + r\varepsilon^p t + o(t)),$$

suggère que les petites valeurs initiales ont d'autant plus de mal à "démarrer" que p est grand.

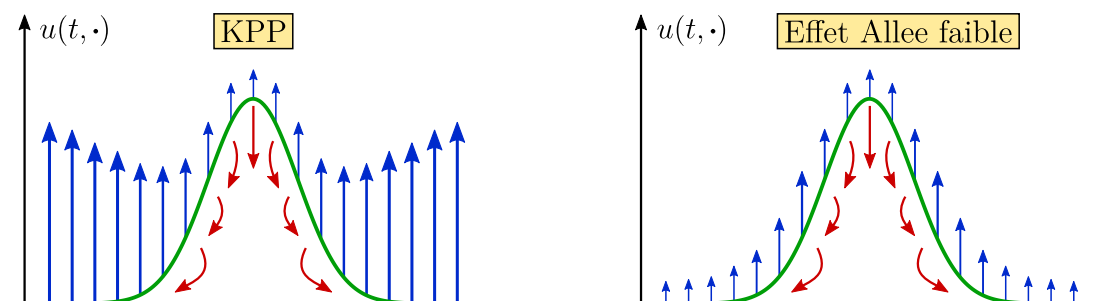


Figure 26 — Tendances variationnelles apportées par les parties réactives et diffusives dans une équation de réaction-diffusion. Les flèches bleues représentent le taux de croissance rapporté à un individu, tandis que les flèches rouges symbolisent la dispersion apportée par la partie diffusive. À gauche, la réaction est de type Fisher-KPP et domine systématiquement la dynamique en temps long — cf. la sous-section 1.1.7. À droite, la réaction présente un effet Allee faible. Dans ce second cas, certaines densités, trop petites en un sens, seront trop fortement "étalées" par la diffusion pour que la réaction puisse les faire croître significativement, les menant à disparaître uniformément en temps long.

Une réponse partielle à la question de caractériser l'invasion ou l'extinction des solutions en présence d'un effet Allee faible est donnée dans le célèbre article [14] de Aronson et Weinberger de 1978. Leur résultat est le suivant.

Théorème 1.12 (Persistance *vs.* extinction en présence d’un effet Allee faible)

Soit $p > 0$. On pose $p_F := 2/N$ (rappelons que $N \in \mathbb{N}^*$ dénote la dimension de l’espace).

- Si $0 < p \leq p_F$, alors il y a *Hair Trigger Effect* : toute solution non-négative et non-triviale de (1.58) envahit l’espace en convergeant localement uniformément vers 1 — comme dans le cas KPP.
- Si $p > p_F$, alors il n’y a pas *Hair Trigger Effect* : certaines solutions non-négatives et non-triviales de (1.58) ne vont pas envahir, et vont converger uniformément vers 0 en temps long.

En lisant le second point du Théorème 1.12, on peut se demander quels sont les critères sur u_0 qui déterminent l’invasion ou l’extinction. En se rappelant que l’effet Allee pénalise les faibles densités, on peut assez bien imaginer que la petitesse de la donnée initiale va jouer un rôle crucial — notons cependant qu’il est très difficile de définir parfaitement cette notion de “petitesse”, qui pourrait inclure un subtil mélange de suprémum, de masse et de fragmentation. On verra par la suite qu’un contrôle du type

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < C \tag{1.59}$$

est une condition suffisante pour provoquer l’extinction des solutions de (1.58) lorsque $p > p_F$. Cela dit, cette condition est loin d’être fine puisqu’elle ne donne pas d’information sur la répartition spatiale de la donnée. Ainsi, on peut imaginer que toute donnée initiale de normes L^1 et L^∞ arbitrairement grandes pourrait tout de même s’éteindre à condition de la fragmenter suffisamment comme suggéré sur la figure qui suit.

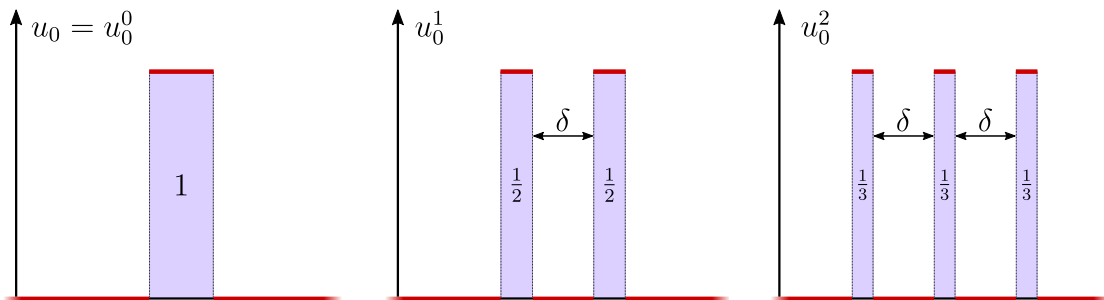


Figure 27 — Un exemple de suite de fragmentations d’une donnée initiale u_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_0^n possède un suprémum et une masse unitaires, pourtant, pour n suffisamment grand, on peut s’attendre à ce que la répartition de u_0^n devienne de moins en moins favorable à la survie en présence de l’effet Allee faible⁵².

⁵²On s’assure de prendre n suffisamment grand car il apparaît que la fragmentation “de faible intensité” puisse être favorable à la persistance de la population dans certains cas. On peut observer numériquement ce phénomène dans le cas bistable en prenant pour données initiales deux marches espacées d’une petite largeur δ — voir [80, notamment les Figures 1 et 4]. Ce fait reste cependant une conjecture numérique à l’heure actuelle.

Il convient de signaler ici que la notion de “fragmentation” n’est actuellement pas clairement définie, plusieurs définitions intuitivement acceptables pouvant s’y prêter [7]. Notons également que cette recherche des meilleures répartitions de la donnée initiale permettant la survie peut faire penser à certaines questions d’optimisation sous contraintes L^1 [114] ou L^1 - L^∞ [108] en domaine borné.

La “déstabilisation” de l’état identiquement nul lorsque p franchit la valeur critique $p_F = 2/N$ est une propriété intrinsèque aux faibles densités et reste ainsi vraie lorsqu’on retire le terme de compétition $-u^{2+p}$ de (1.58). Plus précisément, les solutions de l’équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u = \Delta u + u^{1+p}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.60)$$

présentent, comme pour celles de (1.58), un changement de comportement pour cette valeur critique de $p = p_F$, comme l’annonce le théorème qui suit et que l’on doit notamment au mathématicien japonais Hiroshi Fujita dans son travail [78] de 1966.

Théorème 1.13 (Explosion *vs.* existence globale des solutions de (1.60))

Soit $p > 0$. Reprenons $p_F = 2/N$ comme dans le Théorème 1.12.

- *Si $0 < p \leq p_F$, alors toute solution non-négative et non-triviale de (1.60) va exploser en temps fini.*
- *Si $p > p_F$, alors certaines solutions non-négatives et non-triviales de (1.58) vont être globales et converger uniformément vers 0 en temps long.*

On peut remarquer avant toute chose, qu’à données initiales identiques, la solution de (1.60) majore toujours celle de (1.58), faisant de la possible extinction énoncée dans le second point du Théorème 1.12 un simple corollaire du second point du Théorème 1.13. Le Hair Trigger Effect annoncé dans le premier point du Théorème 1.12 est, quant à lui, plus subtil à démontrer et s’appuie également sur le premier point du Théorème 1.13. Une preuve plus accessible que l’originale d’Aronson et Weinberger dans [14] se trouve dans le livre de Quittner et Souplet [123, Chapitre II, Section 18, Théorème 18.7, p.109].

Il est possible de se rendre compte de l’influence de la position de p par rapport à $p_F = 2/N$ en regardant la solution de l’EDO sur-linéaire sous-jacente $U' = U^{1+p}$ partant d’une valeur initiale U_0 . On peut résoudre explicitement cette EDO, dont la solution peut s’écrire, en échelle “inverse à la puissance p ” comme

$$\frac{1}{U^p(t)} = \frac{1}{U_0^p} - pt. \quad (1.61)$$

De manière inévitable, cette quantité va finir par atteindre 0 au temps $T := 1/(pU_0^p)$, ce qui correspond à l’explosion de U . Maintenant, pour simuler l’action dispersive apportée par la diffusion dans (1.58), essayons de pénaliser la croissance de U en faisant disparaître U_0 à la même vitesse algébrique que le font les solutions de l’équation de la chaleur :

$$U_0 = U_0(t) := c/(1+t)^{N/2}. \quad (1.62)$$

Ici, la constante c va jouer le rôle de la taille de la donnée initiale (cf. (1.39)). En introduisant un tel $U_0(t)$ dans (1.61), il vient

$$\frac{1}{U^p(t)} = \frac{(1+t)^{Np/2}}{c^p} - pt. \quad (1.63)$$

On voit alors apparaître un rapport de force algébrique dans le membre de droite de (1.63) :

- Si $p < 2/N$, alors la quantité $(1+t)^{Np/2}/c^p$ est sous-linéaire, de sorte que $-pt$ domine systématiquement la dynamique de (1.63) en temps long et $1/U^p(t)$ finit toujours par toucher 0, provoquant l'explosion de U — cf. la Figure 28.
- Si $p > 2/N$, alors $(1+t)^{Np/2}/c^p$ est cette fois-ci sur-linéaire, lui faisant dominer la dynamique en temps long, si bien que pour une constance c choisie suffisamment petite, on peut empêcher $1/U^p(t)$ de toucher 0 — cf. la Figure 28. On peut noter que dans ce cas, $U(t)$ n'aura d'autre choix que de disparaître en temps long.

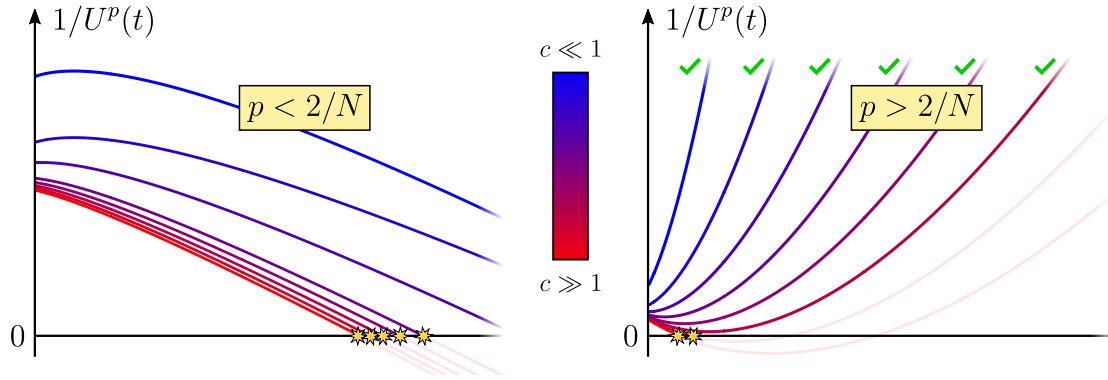


Figure 28 — Illustration du comportement de (1.63) dans les deux régimes $p < 2/N$ (explosion systématique) et $p > 2/N$ (possible existence globale). Chaque croisement d'une courbe avec l'axe des abscisses (\star) signifie que U explose au moment du contact. Les symboles \checkmark signalent l'existence globale de U .

Schéma de preuve pour la possible existence globale Une façon de montrer la possible existence globale des solutions de (1.60) dans le régime $p > 2/N$ consiste en la construction de sur-solutions de la forme $\bar{u}(t, x) = f(t) \times u(t, x)$, où u désigne la solution de l'équation de la chaleur partant de u_0 , et où f est une fonction à déterminer. En demandant qu'un tel \bar{u} soit sur-solution, il vient qu'on doit avoir

$$f'(t) \geq u^p(t, x) f^{1+p}, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.64)$$

Grâce au contrôle uniforme dont on dispose sur les solutions de l'équation de la chaleur à données $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, à savoir,

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c/(1+t)^{N/2}, \quad \forall t > 0,$$

où l'on peut prendre

$$c := 2^{N/2}(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}), \quad (1.65)$$

on peut atteindre (1.64) pour tout x en demandant à f de vérifier le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{c^p}{(1+t)^{Np/2}} f^{1+p}, & t > 0, \\ f(0) = 1. \end{cases} \quad (1.66)$$

Notons que $f(0) = 1$ permet d'assurer d'avoir $\bar{u}|_{t=0} \equiv u_0$ au temps initial. La résolution explicite de (1.66) montre alors qu'il est possible que f soit globale en temps, à condition que p soit plus grand que $2/N$ et c soit suffisamment petit — ce qu'on peut traduire par (1.59), en tenant compte de l'expression de c donnée par (1.65). Dans ce cas-ci, le caractère borné de f nous indique de surcroît que u , en plus d'être globale, va disparaître uniformément en espace à la même vitesse que la solution u du problème linéaire.

Schéma de preuve pour l'explosion systématique Il existe plusieurs manières de montrer l'explosion systématique dans le régime $p < 2/N$ — le cas critique étant évidemment plus fin. Celle que nous présentons ici repose sur l'utilisation d'un noyau gaussien pour “flouter” la solution avant de l'évaluer en $x = 0$. Cette manipulation permet de capturer suffisamment d'informations sur la répartition de la solution afin de pouvoir se ramener à un problème d'explosion pour une EDO. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$ (jouant sur l'intensité du flou gaussien utilisé), on pose la famille de gaussiennes de masses 1,

$$\Phi_\varepsilon(x) := C(\varepsilon) \times e^{-\varepsilon|x|^2},$$

où $C(\varepsilon) := (\varepsilon/N)^{N/2}$. On peut, dans un premier temps, vérifier que pour $\lambda := 2N\varepsilon$, le couple $(\lambda, \Phi_\varepsilon)$ est un sous-élément propre du Laplacien :

$$-\Delta\Phi_\varepsilon \leq \lambda\Phi_\varepsilon. \quad (1.67)$$

Posons maintenant le flouté gaussien de u évalué en $t > 0$ et $x = 0$:

$$\mathcal{U}(t) := [\Phi_\varepsilon * u(t, \cdot)](0) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(z)u(t, z)dz.$$

Il convient de remarquer que $\mathcal{U}(t)$ minore $u(t, 0)$, de sorte qu'il suffit de faire exploser \mathcal{U} pour conclure. Comme mentionné plus haut, le paramètre positif ε joue sur la variance des gaussiennes Φ_ε , soit l'intensité du flou.

- Pour $\varepsilon \ll 1$, la variance de Φ_ε est très importante, de sorte que \mathcal{U} capture essentiellement la masse de u :

$$\mathcal{U}(t) = \left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^{N/2} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon^{(N+2)/2}). \quad (1.68)$$

- Pour $\varepsilon \gg 1$, les gaussiennes Φ_ε sont resserrées autour de l'origine et convergent vers une approximation de l'unité lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$. Cette fois-ci, \mathcal{U} capture la valeur $u(t, 0)$, qu'on peut associer à sa norme infinie — quitte à prendre une sous-solution radiale décroissante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(t) = u(t, 0) = \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

En somme, on peut interpréter les éléments de $(\mathcal{U}(t))_{\varepsilon > 0}$ comme la réalisation de subtils mélanges entre les normes L^1 et L^∞ de $u(t, \cdot)$. On va maintenant montrer que \mathcal{U} vérifie une inégalité différentielle qui la fera systématiquement exploser lorsque ε sera choisi suffisamment petit. En dérivant \mathcal{U} , il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \Phi_\varepsilon * (\Delta u + u^{1+p}) \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} [\Delta \Phi_\varepsilon * u] + [\Phi_\varepsilon * u^{1+p}] \\ &\stackrel{\text{Jensen}}{\geq} [\Delta \Phi_\varepsilon * u] + [\Phi_\varepsilon * u]^{1+p} \\ &\stackrel{(1.67)}{\geq} -\lambda[\Phi_\varepsilon * u] + [\Phi_\varepsilon * u]^{1+p} \\ &= -\lambda \mathcal{U} + \mathcal{U}^{1+p}, \end{aligned}$$

si bien qu'il suffit de montrer l'explosion de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} U' = -\lambda U + U^{1+p}, & t > 0, \\ U(0) = U_0 = [\Phi_\varepsilon * u_0](0), \end{cases} \quad (1.69)$$

pour conclure. Cette EDO présente deux équilibres positifs qui sont

$$O := 0 \text{ (stable)} \quad \text{et} \quad E_1 := \lambda^{1/p} = (2N\varepsilon)^{1/p} \text{ (instable)}.$$

Les trajectoires positives vont être globales ou exploser suivant leur position par rapport à ces équilibres :

- Si $0 < U_0 < E_1$, alors U va être globale et converger vers 0.
- Si $U_0 > E_1$, alors U va exploser en temps fini.

L'objectif est alors de trouver ε pour que $U_0 = [\Phi_\varepsilon * u_0](0) > E_1$. En observant (1.68), on peut se rendre compte que

- $[\Phi_\varepsilon * u_0](0)$ est de l'ordre de $\varepsilon^{N/2}$ pour les petits ε , tandis que
- E_1 est de l'ordre de $\varepsilon^{1/p}$.

Par conséquent, il est nécessaire de se placer dans le régime $p < N/2$ si l'on veut que E_1 dépasse systématiquement U_0 dans la course vers 0, ce qui établit l'explosion de $U \leq \mathcal{U} \leq u(t, 0)$ et conclut la preuve.

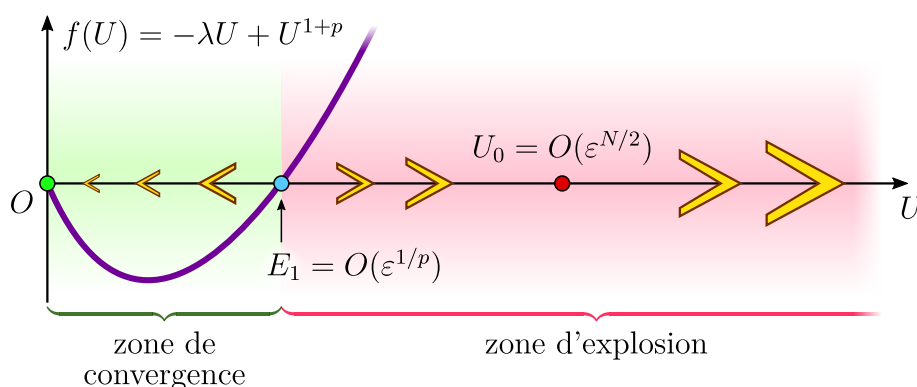


Figure 29 — Positionnement de U_0 et des équilibres sur la ligne de phases associée à l'EDO de (1.69). Dans le régime d'explosion systématique $p < 2/N$, on peut toujours ordonner $E_1 < U_0$ en choisissant ε suffisamment petit. Ceci a pour effet de faire exploser $U \leq \mathcal{U} \leq u(t, 0)$.

1.2 Contributions de la thèse

La présente section se divise en trois parties.

- La sous-section 1.2.1 traite de la dérivation microscopique d'un système champ-route. Ce travail [9], en collaboration avec [Matthieu Alfaro](#) et [Mustapha Mourragui](#), est en cours de finalisation et sera soumis très prochainement.
- La sous-section 1.2.2 porte sur l'explicitation des solutions du système champ-route macroscopique. Ce travail, en collaboration avec [Matthieu Alfaro](#) et [Romain Ducasse](#), a donné lieu à la publication [6] dans *Journal of Differential Equations*.
- La sous-section 1.2.3 explore des résultats de type Fujita pour un système échangeur de chaleur. Ce travail, écrit seul, a donné lieu à la publication [139] dans *SIAM Journal of Mathematical Analysis*.

1.2.1 Résumé du Chapitre 2 : Un système champ-route microscopique

Le travail [9] présenté dans le Chapitre 2 résulte d'une collaboration avec [Matthieu Alfaro](#) et [Mustapha Mourragui](#). Nous prévoyons de le soumettre très prochainement.

Ce chapitre porte sur la dérivation d'un système champ-route diffusif à partir d'un modèle d'exclusion simple. Plutôt que la simulation heuristique de la Figure 16, l'objectif est ici de développer un formalisme microscopique rigoureux. Il convient de signaler que la sous-section 1.1.3 constitue un prérequis essentiel pour les développements ultérieurs.

Le modèle que nous développons dans ce chapitre présente quelques différences⁵³ avec le système champ-route original (1.31) :

⁵³Outre le fait que la dimension du domaine N a été renommée p afin de pouvoir utiliser $N \geq 2$ pour la taille du système de particules.

- Le domaine spatial en demi-espace $\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}_+^*$ est remplacé par le domaine cylindrique $\mathbb{T}^{p-1} \times (0, 1)$. Des conditions de type Neumann homogènes sont imposées à la frontière supérieure du cylindre $\mathbb{T}^{p-1} \times \{1\}$ afin de préserver la masse de la solution à la limite hydrodynamique — voir la Figure 30. Ce type de conditions au bord supérieur pourra faire penser aux travaux de Baldasso, Menezes, Neumann et Souza [15] — cf. la sous-section 1.1.3. Notre intérêt principal porte cependant sur l'étude de la condition d'échange à la frontière inférieure. C'est en effet sur cet aspect que repose la principale nouveauté du modèle que nous proposons — voir la fin de cette sous-section pour plus de détails.
- Une mise à l'échelle sur les inconnues et les variables spatiales et temporelles, à savoir

$$\tilde{v}(t, x, y) := v\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right), \quad \tilde{u}(t, x) := \lambda u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right),$$

avec $\lambda := \mu/\nu$, permet de travailler, sans perte de généralité, avec des constantes identiques pour la condition d'échange. On pose alors $\tilde{\mu} = \tilde{\nu} =: \alpha$ pour réserver aux mesures les lettres μ et ν . Cette “symétrisation” des coefficients d'échange est une étape nécessaire pour correctement faire apparaître la condition d'échange du champ-route avec la dynamique que nous utilisons — voir la Figure 31. Notons, sur la Figure 31, qu'en prenant β au lieu de α dans (\spadesuit) et $N\beta$ au lieu de $N\alpha$ dans (\diamond) , une condition d'échange non-linéaire fait son apparition :

$$-\partial_y v|_{y=0} = \alpha u - \beta v|_{y=0} + (\beta - \alpha)uv|_{y=0}.$$

Cette intrigante condition d'échange n'est pas standard et nécessiterait une nouvelle analyse approfondie.

En effaçant les “tildes” pour plus de clarté, le système champ-route que nous considérons prend ainsi la forme

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \alpha u - \alpha v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 0, \\ \partial_t u = D\Delta u + \alpha v|_{y=0} - \alpha u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_{y=1} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 1, \end{cases} \quad (1.70)$$

que l'on munit d'une condition initiale

$$\begin{cases} v|_{t=0} = v_0 \in L^\infty(\Lambda) \cap [0, 1]^{\mathbb{T}^{p-1} \times (0, 1)}, & x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^{p-1}) \cap [0, 1]^{\mathbb{T}^{p-1}}, & x \in \mathbb{T}^{p-1}. \end{cases} \quad (1.71)$$

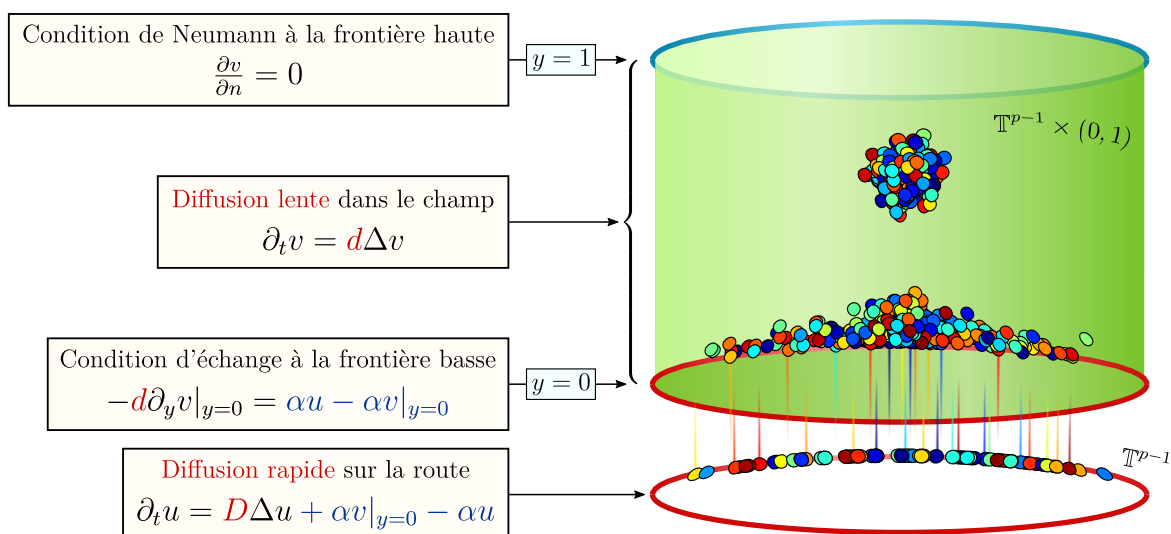


Figure 30 — Illustration heuristique de la dispersion de particules sur l'espace champ-route cylindrique considéré dans le Chapitre 2. On renvoie le lecteur à la version en demi-espace sur la Figure 16 pour plus de détails.

La contribution principale de [9] est synthétisée dans le Théorème 2.4 dont une version succincte est énoncée ci-dessous. Pour en faciliter la compréhension, ce résultat peut être regardé en parallèle du Théorème 1.4 qui concerne la limite hydrodynamique pour l'équation de la chaleur sur le tore.

Théorème 1.14 (Alfaro, Mourragui, Tréton (2024) [9]) *Fixons un horizon temporel $T > 0$. Prenons $v_0 : \Lambda \rightarrow [0, 1]$ et $u_0 : \mathbb{T}^{p-1} \rightarrow [0, 1]$ deux données initiales mesurables, et $(\mu_N)_{N \geq 2}$ une suite de mesures de probabilité sur l'espace des états associée à (v_0, u_0) . On note $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$ le processus à valeurs dans l'espace des états émergeant de la mesure initiale μ_N et de la dynamique d'un certain générateur \mathcal{L}_N spécifié dans (2.4) — voir aussi la Figure 31.*

Alors, la suite de probabilités $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$, mesurant l'apparition des trajectoires de mesures empiriques associées au processus $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$, converge faiblement vers une mesure \mathbb{Q}_∞ qui donne masse 1 à la trajectoire

$$\left(\pi^{\text{field}}(t, dx dy), \pi^{\text{road}}(t, dx) \right)_{t \in [0, T]} = \left(v(t, x, y) dx dy, u(t, x) dx \right)_{t \in [0, T]},$$

où (v, u) est l'unique solution faible (en un sens à préciser) du problème de Cauchy (1.70)-(1.71) sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

En particulier, pour tout $t \in [0, T]$, tout $\delta > 0$, et pour toute fonction test

$$G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1} \times [0, 1]) \quad \text{et} \quad H \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1}),$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\left\{ (\nu^{\text{field}}(t)) \in D([0, T], \mathcal{M}^{\text{field}}) \text{ tels que } |\langle \nu^{\text{field}}(t), G(t) \rangle - \langle v(t), G(t) \rangle| > \delta \right\} \right) = 0,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\left\{ (\nu^{\text{road}}(t)) \in D([0, T], \mathcal{M}^{\text{road}}) \text{ tels que } |\langle \nu^{\text{road}}(t), H(t) \rangle - \langle u(t), H(t) \rangle| > \delta \right\} \right) = 0.$$

La dynamique de notre modèle microscopique, brièvement mentionnée dans le théorème ci-dessus, se décompose en cinq parties (●●●●) indiquées sur la Figure 31, et détaillées ci-dessous.

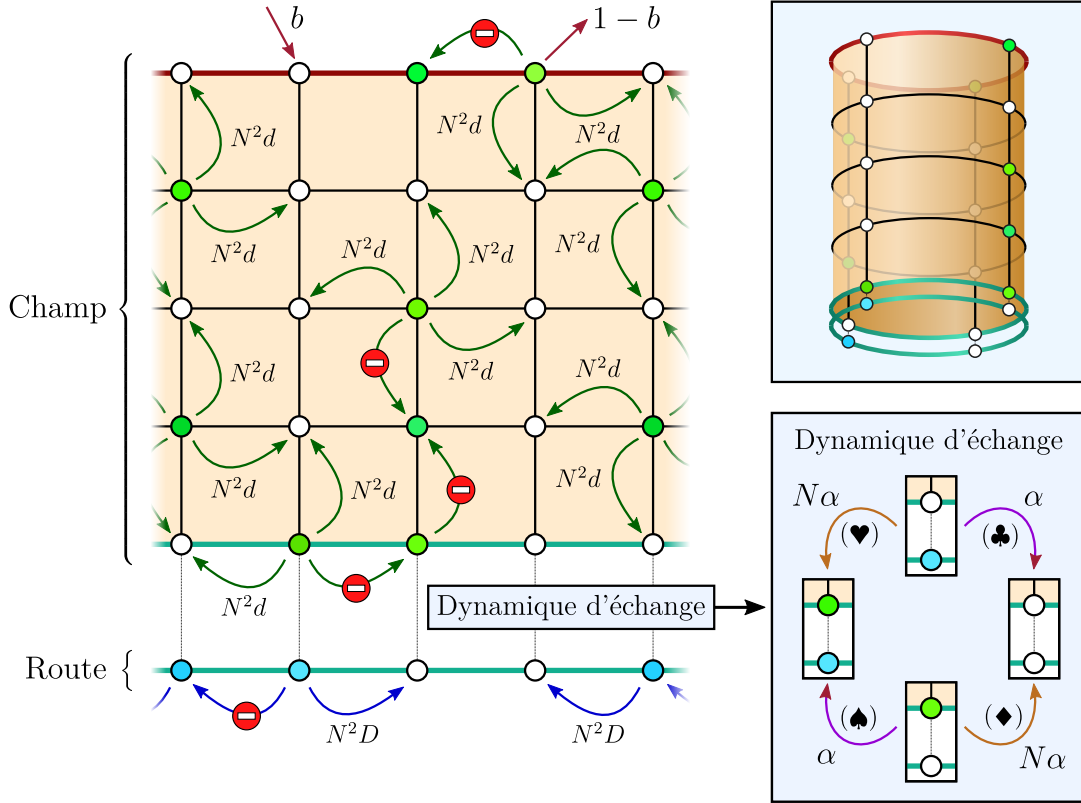


Figure 31 — Illustration de la dynamique microscopique du système de particules utilisée dans le Chapitre 2 pour dériver le modèle champ-route (1.70).

- Les échanges diffusifs dans le champs et sur la route se produisent respectivement à taux N^2d et N^2D et sont représentés par les flèches en vert et en bleu sur la figure.

- En haut du champ, les individus sont créés à taux b et retirés à taux $1 - b$, ce qui correspond au cas $\theta = 2$ dans l'article de Baldasso, Menezes, Neumann et Souza [15] décrit à la fin de la sous-section 1.1.3. La faible fréquence de ces évènements, symbolisés par

des flèches rouges sur la figure, permet de retrouver des conditions de type Neumann à la frontière supérieure.

● Les deux dernières sous-dynamiques permettent de former la condition d'échange qui se décompose en la réaction sur la route (correspondant aux événements (♣) et (♠) symbolisés par les flèches violettes sur la figure) et en la condition de type Robin à la frontière basse du champ (correspondant aux événements (♥) et (♦) accélérés par N symbolisés par les flèches marron sur la figure).

L'originalité de notre travail, se situant à l'intersection des problèmes de réaction-diffusion et de modélisation en dynamique des populations et en épidémiologie, réside dans le fait que le système considéré est posé sur des ensembles de dimensions différentes. À notre connaissance, cette situation est inédite dans la littérature des systèmes de particules en interaction. C'est en particulier la première fois que des conditions de couplage flux/réaction sont dérivées pour ce type de systèmes complexes. La principale difficulté de cette démarche est de déterminer les événements ainsi que les accélérations nécessaires pour reproduire la dynamique d'échange (cf. la Figure 31), dont les événements (♥) et (♦), accélérés par $N = N^{2-1}$, pourront faire penser au cas $\theta = 1$ permettant de retrouver des conditions de type Robin pour l'équation de la chaleur dans [15] — cf. la fin de la sous-section 1.1.3.

Par ailleurs, nous proposons une méthode non conventionnelle dans la littérature des systèmes de particules en interaction pour prouver l'unicité de la solution faible. Elle s'appuie sur l'utilisation de fonctions test adéquates, solutions d'un problème "dual" relié à (1.70), que l'on exprime au moyen du principe de Duhamel et du noyau de la chaleur du modèle champ-route diffusif (1.70). Il est à noter que l'expression de ce noyau peut être déterminée par une adaptation de la méthode de transformée de Fourier/Laplace présentée dans le Chapitre 3.

1.2.2 Résumé du Chapitre 3 : Dérivation explicite des solutions du système champ-route diffusif

Le Chapitre 3 est un travail en collaboration avec [Mathieu Alfaro](#) et [Romain Ducasse](#) qui a donné lieu à la publication [6] dans *Journal of Differential Equations*.

On considère ici le modèle champ-route diffusif original (1.31) que l'on rappelle ici :

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \mu u - \nu v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u + \nu v|_{y=0} - \mu u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (1.72)$$

et que l'on munit d'une donnée initiale (v_0, u_0) bornée et intégrable.

La première contribution que nous apportons dans [6] est de fournir la solution fondamentale de (1.72) en passant par une double transformée intégrale — Fourier en la

variable de la route x , et Laplace en la variable temporelle t ⁵⁴. Cette transformation permet d'éliminer la dérivée temporelle ainsi qu'une partie du Laplacien dans la première équation de (1.72) grâce aux identités

$$\mathcal{F} [\Delta w(t, \cdot)] (\xi) = -\|\xi\|^2 \mathcal{F} [w(t, \cdot)] (\xi),$$

et

$$\mathcal{L} [\Delta w(\cdot, x)] (s) = s \mathcal{L} [w(\cdot, x)] (s) - w|_{t=0}(x),$$

valides pour toute fonction $w \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{N-1})$ disparaissant convenablement aux asymptotiques $t, \|x\| \rightarrow \infty$. On est alors amené à résoudre une EDO linéaire du second ordre en y dont on fixe les deux degrés de liberté avec la condition d'échange pour l'un et en imposant la disparition de $v(t, x, y)$ lorsque $y \rightarrow \infty$ pour l'autre. L'usage d'opérations algébriques élémentaires nous amène ensuite à des formes explicites pour les transformées de "Fourier-Laplace" de u et de v , qu'on peut, au moins implicitement, inverser.

Ce résultat, énoncé dans le Théorème 3.1 est rappelé ci-dessous.

Théorème 1.15 (Alfaro, Ducasse, Tréton (2022) [6]) *Supposons $D > d$ et prenons $v_0 : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et intégrables. Alors l'unique solution bornée du système champ-route (1.72) muni de la donnée initiale (v_0, u_0) est explicitement donnée par*

$$\begin{aligned} v(t, X) = & V(t, X) + \frac{\mu}{\sqrt{d}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(t, z, y) u_0(x - z) dz \\ & + \frac{\mu \nu}{\sqrt{d}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(s, z, y) V|_{y=0}(t - s, x - z) dz ds, \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$u(t, x) = e^{-\mu t} U(t, x) + \nu \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_R^D(t - s, x - z) v|_{y=0}(s, z) dz ds, \quad (1.74)$$

où

- $V = V(t, X)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t V = d \Delta V, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \\ \nu V|_{y=0} - d \partial_y V|_{y=0} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ V|_{t=0} = v_0, & x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \end{cases} \quad (1.75)$$

⁵⁴L'utilisation de la transformée de Fourier est signalée par un chapeau ($\hat{\cdot}$) et change la variable x en ξ . L'utilisation de la transformée de Laplace est, quant à elle, signalée par un chapeau arrondi (\frown) et change la variable t en s . La notation (\frown) signale enfin l'utilisation simultanée des transformées de Fourier et de Laplace. Les définitions et les quelques propriétés importante de ces transformées sont rappelées dans l'Appendice 3.A.3.

- $U = U(t, x)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t U = D\Delta U, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ U|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (1.76)$$

- $G_R^D = G_R^D(t, x)$ désigne le noyau de la chaleur de dimension $(N-1)$ avec diffusion D , à savoir

$$G_R^D(t, x) := \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N-1}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4Dt}}, \quad (1.77)$$

- et $\Lambda = \Lambda(t, x, y)$ est défini comme

$$\Lambda(t, x, y) := \frac{e^{-\frac{y^2}{4dt}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[a\alpha\Phi_\alpha + b\beta\Phi_\beta + c\gamma\Phi_\gamma \right] (t, \xi, y) e^{-dt\|\xi\|^2 + i\xi \cdot x} d\xi, \quad (1.78)$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)(\xi)$ sont les trois racines complexes des polynômes “ δ -indexés”

$$P_\delta(\sigma) := \sigma^3 + \frac{\nu}{\sqrt{d}} \sigma^2 + (\mu + \delta) \sigma + \frac{\nu \delta}{\sqrt{d}}, \quad \text{avec } \delta := (D - d)\|\xi\|^2, \quad (1.79)$$

$(a, b, c) = (a, b, c)(\xi)$ sont donnés par

$$a := \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad b := \frac{1}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, \quad c := \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \quad (1.80)$$

et pour $\bullet \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

$$\Phi_\bullet(t, \xi, y) := \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\bullet\sqrt{d}t + y}{2\sqrt{dt}} \right), \quad (1.81)$$

où $\Gamma(\ell) := e^{-\ell^2}$, et Erfc est la fonction erreur complémentaire, dont la définition est rappelée dans l'Appendice 3.A.1.

Il s'agit de la première apparition d'une forme explicite de la solution du système champ-route diffusif dans la littérature, constituant une avancée significative dans notre compréhension du modèle. La méthodologie employée, combinant la double transformée intégrale de Fourier et de Laplace, permet de surmonter les défis inhérents à la géométrie non conventionnelle du modèle. Elle permet notamment de gérer les interactions délicates entre les différentes dimensions du système et de traiter efficacement le couplage flux/réaction entre les inconnues. Notons que l'inversion de cette double transformée intégrale représente une difficulté majeure, et ne peut se faire que explicitement/implicitement, cf. (1.78). Ce résultat n'est pas seulement théoriquement significatif, mais il fournit également un outil puissant pour aborder des problèmes non linéaires complexes. En particulier, il est la

première étape vers l’analyse des vitesses de propagation avec des réactions de type KPP, ainsi que certaines questions de persistance contre extinction en présence d’un effet Allee faible.

L’expression de la composante u de la solution, donnée par (1.74) dans le Théorème 1.15, peut en fait être mise en évidence en absorbant la réaction linéaire $-\mu u$ avec une exponentielle temporelle puis en utilisant le principe de Duhamel avec le terme source $\nu v|_{y=0}$. C’est finalement dans l’expression de la composante v donnée par (1.73) que se trouve l’essence du modèle champ-route, notamment au travers de la fonction $\Lambda = \Lambda(t, x, y)$, explicitée dans (1.78). Cette fonction Λ est particulièrement intéressante puisqu’on peut remarquer qu’en prenant formellement dans (1.73), $(v_0, u_0) = (0, \frac{\sqrt{d}}{\mu} \delta_x)$ (où δ_x représente une masse de Dirac au point $x \in \mathbb{R}^{N-1}$), on retrouve exactement $v \equiv \Lambda$. En ce sens, Λ peut être interprété comme un certain “noyau d’échange de la route vers le champ”. On pourra remarquer dans la complexité de l’expression de Λ les stigmates de l’inversion de la transformée de Fourier ainsi que la présence des trois racines complexes (α, β, γ) de certains polynômes P_δ , indispensables pour effectuer les décompositions en éléments simples requises pour inverser la transformée de Laplace.

La seconde contribution de [6] donne un contrôle asymptotique en temps et uniforme en espace des solutions bornées et intégrables de (1.72). Ce résultat, énoncé dans le Théorème 3.2, est rappelé ici.

Théorème 1.16 (Alfaro, Ducasse, Tréton (2022) [6]) *Supposons $D > d$ et prenons $v_0 : \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et intégrables. Alors la solution bornée (v, u) du système champ-route (1.72) muni de la donnée initiale (v_0, u_0) est contrôlée de la manière suivante :*

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{C_{v_0} \ln(1+t) + C_{u_0}^{u_0}}{(1+t)^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0, \quad (1.82)$$

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \lesssim \frac{C_{v_0} \ln(1+t) + C_{u_0}^{u_0}}{(1+t)^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0, \quad (1.83)$$

pour une certaine constante $C_{v_0} \geq 0$ ne dépendant que de v_0 , et une certaine constante $C_{u_0}^{u_0} \geq 0$ dépendant à la fois de v_0 et de u_0 .

Ce second résultat met en lumière l’une des premières propriétés qualitatives fines que l’on peut extraire de l’expression des solutions du système champ-route diffusif, telle que donnée par le Théorème 1.15. Le principal obstacle pour l’établir est le contrôle du noyau d’échange Λ , qui constitue le cœur du modèle champ-route. Au vu des formules (1.78), (1.79), (1.80), (1.81), il est évident qu’une telle estimation est bien plus sophistiquée que pour des problèmes de diffusion plus classiques. Il s’agit notamment de comprendre finement les racines complexes des polynômes P_δ , qui caractérisent le comportement de Λ . Notons que le comportement asymptotique du Théorème 1.16 quantifie la dispersion

du modèle, ce qui est une information précieuse pour traiter des problèmes de persistance contre extinction en présence d'un effet Allee faible — cf. les sous-sections 1.1.4 et 1.1.8.

Rappelons ici que les solutions de l'équation de la chaleur dans le demi-espace $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+^*$ sont contrôlées par

- $c/t^{\frac{N+1}{2}}$ lorsque les conditions de bords sont de type Dirichlet ou Robin, et
- $c/t^{\frac{N}{2}}$ lorsque les conditions de bords sont de type Neumann.

En ce qui concerne le modèle champ-route, la solution (v, u) est essentiellement contrôlée par $c \ln(1+t)/t^{\frac{N}{2}}$ (ce qui est très légèrement “moins bien” que $c/t^{\frac{N}{2}}$), comme on pourra l'observer dans (1.82) et (1.83). L'apparition de ce terme logarithmique provient d'une estimation uniforme de certains termes du noyau d'échange Λ (cf. le Lemme 3.7), difficilement améliorable. Dans le cas particulier où v_0 est identiquement nul, on peut cependant affiner ce contrôle en $c/t^{N/2}$, ce qui nous pousse à penser que la solution est en réalité systématiquement contrôlée de cette manière. On peut ainsi dire que le modèle champ-route possède la même intensité dispersive que l'équation de la chaleur en demi-espace munie de conditions de Neumann. Cela va dans le sens de l'explication heuristique qui suggère que ce sont la dimension et la perte/non-perte des individus qui fixent le taux de décroissance.

1.2.3 Résumé du Chapitre 4 : Résultats de type Fujita sur un système couplé par la diffusion

Le Chapitre 4 de ce manuscrit porte sur un travail réalisé seul, ayant donné lieu à la publication [139] dans SIAM Journal of Mathematical Analysis.

On se concentre dans cette partie sur l'analyse d'un système échangeur de chaleur qui consiste en un système de deux équations de réaction-diffusion posées sur \mathbb{R}^N , dont le couplage se fait par l'intermédiaire de réactions linéaires. Plus précisément, on s'intéresse à la solution (u, v) de

$$\begin{cases} \partial_t u = c\Delta u - \mu u + \nu v + f(u), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t v = d\Delta v + \mu u - \nu v + g(v), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.84)$$

muni d'une donnée initiale bornée et intégrable.

Une importante partie de [139] est dédiée à la caractérisation du comportement des solutions de (1.84) dans le cas purement diffusif, c'est-à-dire lorsque $f \equiv g \equiv 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} = c\Delta \mathbf{u} - \mu \mathbf{u} + \nu \mathbf{v}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \mathbf{v} = d\Delta \mathbf{v} + \mu \mathbf{u} - \nu \mathbf{v}. & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.85)$$

En première approche, il est naturel de regarder (1.85) lorsque $c = d = \mu = \nu = 1$. Dans ce cas, on peut remarquer que le problème se résout explicitement utilisant la transformation linéaire

$$(\sigma, \delta) := (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}),$$

pour laquelle (1.85) devient

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \boldsymbol{\delta} = \Delta \boldsymbol{\delta} - 2\boldsymbol{\delta}. & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On peut alors exprimer explicitement $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\delta}$, ce qui permet finalement d'avoir \boldsymbol{u} et \boldsymbol{v} comme la demi-somme et la demi-différence de $\boldsymbol{\sigma}$ et de $\boldsymbol{\delta}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= \frac{1 + e^{-2t}}{2} (G(t) * u_0) + \frac{1 - e^{-2t}}{2} (G(t) * v_0), \\ \boldsymbol{v}(t) &= \frac{1 - e^{-2t}}{2} (G(t) * u_0) + \frac{1 + e^{-2t}}{2} (G(t) * v_0), \end{aligned}$$

où G représente le noyau de la chaleur dans \mathbb{R}^N . On peut dès lors observer que certaines parties de la solutions vont disparaître exponentiellement vite, si bien qu'on peut décomposer $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ en une partie persistante et une partie évanescence :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= \boldsymbol{u}_\infty(t) + \boldsymbol{u}_e(t), \\ \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}_\infty(t) + \boldsymbol{v}_e(t), \end{aligned} \tag{1.86}$$

avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\infty(t) &= \boldsymbol{v}_\infty(t) = (G(t) * \frac{u_0 + v_0}{2}), \\ \boldsymbol{u}_e(t) &= -\boldsymbol{v}_e(t) = e^{-2t} (G(t) * \frac{u_0 - v_0}{2}). \end{aligned}$$

On voit de cette manière que la solution du problème (1.85) partant de la donnée (u_0, v_0) va ressembler exponentiellement vite à celle de l'équation de la chaleur partant de la donnée initiale moyenne entre u_0 et v_0 .

Lorsque les constantes c, d, μ et ν sont potentiellement différentes, il n'est bien sûr plus possible de découpler le problème par une simple combinaison linéaire des inconnues. On peut malgré tout montrer que les solutions présentent un comportement semblable : on peut toujours décomposer \boldsymbol{u} et \boldsymbol{v} comme dans (1.86), où la partie évanescence $(\boldsymbol{u}_e, \boldsymbol{v}_e)$ va disparaître uniformément et exponentiellement vite, tandis que la partie persistante $(\boldsymbol{u}_\infty, \boldsymbol{v}_\infty)$ va être solution d'un problème de deux équations de diffusion identiques et découplées, dont on note \mathcal{L} l'opérateur diffusif. Ce résultat est énoncé plus précisément dans le Théorème 4.1 que l'on rappelle ci-dessous.

Théorème 1.17 (Tréton (2023) [139]) *Soit $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ la solution du système (1.85) munie d'une donnée initiale non-négative (u_0, v_0) , telle que $u_0, v_0, \widehat{u}_0, \widehat{v}_0$ sont tous dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. On définit, pour $\xi \in \mathbb{R}^N$, les fonctions radiales*

$$r(\xi) := \frac{c-d}{2} |\xi|^2 + \frac{\mu-\nu}{2}, \quad s(\xi) := \mu\nu + [r(\xi)]^2, \tag{1.87}$$

$$L(\xi) := \sqrt{s(\xi)} - \left(\frac{c+d}{2} |\xi|^2 + \frac{\mu+\nu}{2} \right), \tag{1.88}$$

et l'opérateur de dispersion $\mathcal{L} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ au travers de la relation

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}f] = L \times \mathcal{F}[f], \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \quad (1.89)$$

Enfin, soit $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ la solution des équation de diffusion découplées

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_\infty &= \mathcal{L} \mathbf{u}_\infty, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \mathbf{v}_\infty &= \mathcal{L} \mathbf{v}_\infty, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (1.90)$$

partant respectivement des données initiales $u_{\infty,0}$ and $v_{\infty,0}$ définies au travers de leur transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\infty,0} &:= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{r(\xi)}{\sqrt{s(\xi)}} \right) \hat{u}_0 + \frac{\nu}{\sqrt{s(\xi)}} \hat{v}_0 \right], \\ \hat{v}_{\infty,0} &:= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{\sqrt{s(\xi)}} \hat{u}_0 + \left(1 + \frac{r(\xi)}{\sqrt{s(\xi)}} \right) \hat{v}_0 \right]. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Alors il existe deux constantes positives k et k' qui dépendent de N, c, d, μ, ν telles que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq k \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}}, \\ \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq k' \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}}, \end{aligned} \quad (1.92)$$

pour tout $t > 1$.

Ce théorème caractérise, avec une erreur uniforme exponentiellement décroissante, les solutions de l'échangeur de chaleur diffusif (1.85). Notons qu'aucune hypothèse sur les coefficients, autorisant la réduction à un cas scalaire, n'est faite. Ce résultat offre une bonne intuition sur la dynamique du système et met en avant le rapprochement de l'évolution des solutions vers un comportement "moyen", régi par l'opérateur diffusif \mathcal{L} . À la lumière de sa caractérisation fréquentielle⁵⁵, on pourra observer que cet opérateur agit plus ou moins comme une combinaison de plusieurs Laplaciens de différentes diffusivités. Ce point offre une perspective claire et unifiée du fonctionnement de ce modèle et en souligne, par la même occasion, une certaine richesse comportementale.

Une manière d'établir le Théorème 1.17 consiste à passer par la transformée de Fourier qui permet de travailler sur un système linéaire d'EDO. Bien qu'on réussisse à atteindre une forme explicite pour les transformées de Fourier de \mathbf{u} et de \mathbf{v} , le retour dans le domaine spatial s'avère plus difficile. Cela ne pose cependant pas de problème pour estimer uniformément \mathbf{u} et \mathbf{v} qu'on peut contrôler par la masse de $\hat{\mathbf{u}}$ et de $\hat{\mathbf{v}}$ grâce à une des inégalités

⁵⁵Au travers de la fonction L , donnée par (1.88) et représentée sur la Figure 54.

de Hausdorff-Young, à savoir

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (2\pi)^{-N} \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, et qui découle de la formule d'inversion de la transformée de Fourier. À partir des expressions de \widehat{u} et de \widehat{v} , on peut clairement identifier les parties évanescentes \widehat{u}_e et \widehat{v}_e dont la masse disparaît exponentiellement vite. Restent alors les parties persistantes u_∞ et v_∞ dont on caractérise l'équation d'évolution au travers de leur transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\partial_t u_\infty] &= L(\xi) \times \mathcal{F}[u_\infty] = \mathcal{F}[\mathcal{L}u_\infty], \\ \mathcal{F}[\partial_t v_\infty] &= L(\xi) \times \mathcal{F}[v_\infty] = \mathcal{F}[\mathcal{L}v_\infty]. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Avec l'intention d'obtenir des résultats de type Fujita sur le système (1.84)⁵⁶, on s'intéresse alors au taux de décroissance uniforme de (u, v) . Comme dans le cas de l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^N , on peut montrer que les hautes fréquences de \widehat{u}_∞ et de \widehat{v}_∞ disparaissent exponentiellement vite⁵⁷, si bien qu'il faut regarder le comportement de \widehat{u}_∞ et \widehat{v}_∞ au voisinage de la fréquence nulle. Un développement limité au voisinage de l'origine de la fonction $L(\xi)$ caractérisant fréquemment \mathcal{L} — voir (1.93) — nous informe que \mathcal{L} se comporte comme le Laplacien (modulo un certain coefficient diffusif) dans les basses fréquences, si bien qu'on récupère un contrôle uniforme identique à celui de l'équation de la chaleur en $c/t^{N/2}$. On renvoie au Corollaire 4.2 et à sa preuve page 176 pour plus de détails.

Comme mentionné plus haut, la connaissance du taux de décroissance des solutions de l'échangeur de chaleur linéaire (1.85) permet d'aborder des résultats concernant l'explosion en temps fini, et la possible existence globale des solutions lorsque des réactions surlinéaires lui sont ajoutées. Dans la seconde partie de [139], on considère le système

$$\begin{cases} \partial_t u = c\Delta u - \mu u + \nu v + u^{1+\alpha}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t v = d\Delta v + \mu u - \nu v + \kappa v^{1+\beta}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.94}$$

où la constante κ vaut 0 ou 1 et joue le rôle d'un bouton on/off sur la seconde non-linéarité. La présence de cette constante ne pose pas de difficulté supplémentaire dans l'établissement des preuves. Il aurait été possible de traiter un cas plus général en mettant des constantes positives quelconques devant les non-linéarités. Ceci étant dit, c'est finalement la présence ou l'absence de $u^{1+\alpha}$ et de $v^{1+\beta}$ qui régit la dichotomie entre la systématique explosion et la possible existence globale des solutions.

Le résultat de possible existence globale des solutions est présenté dans le Théorème 4.3, tandis que celui de leur explosion systématique est énoncé dans le Théorème 4.4. Ces deux théorèmes sont rappelés ci-dessous.

⁵⁶C'est-à-dire en prenant $f(u) = u^{1+\alpha}$ et $g(v) = v^{1+\beta}$, par exemple.

⁵⁷En effet, rappelons que pour $\partial_t u = \Delta u$ dans \mathbb{R}^N muni d'une donnée intégrable, on a $\widehat{u}(t, \xi) = c e^{-\|\xi\|^2 t}$.

Théorème 1.18 (Possible existence globale, Tréton (2023) [139]) *Soit*

$$\frac{N}{2} > \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } \kappa = 0, \\ \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) & \text{si } \kappa = 1. \end{cases} \quad (1.95)$$

Alors il existe $m_0 > 0$ qui dépend de $N, c, d, \mu, \nu, \alpha, \beta, \kappa$ tel que la solution (u, v) du problème (1.94) muni d'une donnée initiale non-négative (u_0, v_0) existe pour tout temps dès que

$$m := \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < m_0. \quad (1.96)$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse (1.96),

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{M}{(1+t)^{N/2}} \quad \text{et} \quad \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{M'}{(1+t)^{N/2}}, \quad (1.97)$$

pour tout $t > 0$ et certaines constantes positives M et M' dépendant de $N, c, d, \mu, \nu, \alpha, \beta, \kappa$, et m .

Théorème 1.19 (Explosion systématique, Tréton (2023) [139]) *Soit*

$$\frac{N}{2} < \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } \kappa = 0, \\ \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) & \text{si } \kappa = 1. \end{cases} \quad (1.98)$$

Alors toute solution (u, v) du problème (1.94) munie d'une donnée non triviale et non-négative $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^2$ explose en temps fini.

Notons que les études de type Fujita sur les systèmes se concentrent, à notre connaissance, sur des couplages à travers les termes réactifs, cf. [63], [122], [134]. La principale nouveauté apportée par les Théorèmes 1.18 et 1.19 réside dans la nature du problème (1.94), qui est un système de type-Fujita dont le couplage se fait à travers le phénomène diffusif. C'est la première fois, à notre connaissance, qu'un couplage de ce type est considéré dans ce contexte.

La preuve de la possible existence globale est donnée dans la Section 4.4. Pour établir ce résultat, on utilise une adaptation de la méthode présentée dans la sous-section 1.1.8, qui consiste à construire des sur-solutions qui sont le produit de la solution du problème diffusif, fournie par le Théorème 1.17, par une fonction du temps à déterminer.

La principale difficulté émergeant de ce nouveau type de problème (couplé par la diffusion) survient notamment dans la preuve de l'explosion systématique. Dans les cas les plus classiques, l'utilisation du semi-groupe de la chaleur scalaire est en général suffisante pour adapter les preuves du cas scalaire aux systèmes couplés par les termes de réaction. Dans

le cas présent, l'action diffusive n'est pas découplée, ce qui signifie qu'il faudrait considérer le semi-groupe diffusif sur l'ensemble du système pour appliquer des méthodes similaires. Cependant, la forme de ce semi-groupe n'est pas connue (cela reviendrait à savoir inverser la transformée de Fourier (4.25)-(4.26) de la solution du problème linéaire), et quand bien même elle le serait, il n'est pas clair qu'une "inégalité de Jensen"⁵⁸ soit applicable pour ce genre de semi-groupe⁵⁹. Pour relever ce défi, la technique employée (voir la Section 4.5 pour la preuve) est celle du flou gaussien présentée dans la sous-section 1.1.8 dans le cas scalaire. En convolant la solution (u, v) avec certaines gaussiennes de masse unitaire avant évaluation en $x = 0$, on ramène le problème à l'étude d'un système d'EDO dont l'explosion implique celle de u ⁶⁰. Bien que la gestion du portrait de phase associé à ce système (cf. la Figure 55) soit moins évidente que celle du cas scalaire (cf. la Figure 29), on parvient tout de même à montrer que pour ε choisi suffisamment petit (i.e. pour une variance des gaussiennes suffisamment importante), la valeur initiale (U_0, V_0) associée à la solution va effectivement se trouver dans une zone d'explosion, ce qui établit l'explosion de u .

1.3 Perspectives

1.3.1 Propagation de connaissance *via* une dynamique SIR

L'objet de la présente sous-section porte sur un travail en cours en réalisation avec [Romain Ducasse](#) et concerne les propriétés de blocage et de propagation des solutions d'un système d'équations de réaction-diffusion de type SIR couplées en chaîne. Ce projet prend son essence dans l'observation que l'ajout d'une diffusion chez les individus infectés dans le système d'EDO classique SIR fait apparaître une équation de type Fisher-KPP pour la catégorie des individus rétablis. Plus précisément, considérons dans un premier temps le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t S = -\alpha SI, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, & (i) \\ \partial_t I = d\Delta I + \alpha SI - \mu I, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, & (ii) \\ \partial_t R = \mu I, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, & (iii) \\ (S, I, R)|_{t=0} = (S_0, \delta \mathbf{1}_{(-L,L)}, 0), & x \in \mathbb{R}, & \end{cases} \quad (1.99)$$

où d, α, μ, δ et S_0 sont des constantes positives, et dont la dynamique est représentée sur la figure qui suit.

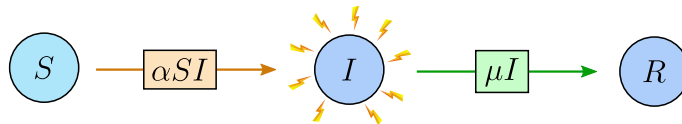


Figure 32 — Illustration des dynamiques de transmission entre les compartiments S, I et R du problème (1.99).

⁵⁸Utilisée pour sortir en dehors de l'évaluation du semi-groupe la non-linéarité convexe $u \mapsto u^{1+\alpha}$.

⁵⁹Il vient la question du sens à donner à la relation d'ordre \leq dans \mathbb{R}^2 .

⁶⁰Notons qu'il suffit d'établir l'explosion systématique pour $\kappa = 0$ grâce au principe de comparaison.

Comme mentionné plus haut, on peut démontrer que l'inconnue R de (1.99) est solution d'une certaine équation de type Fisher-KPP. En effet⁶¹, observons tout d'abord à partir de (i), que

$$\frac{\partial_t S}{S} = -\frac{\alpha}{\mu} \times \mu I \stackrel{(iii)}{=} -\frac{\alpha}{\mu} \times \partial_t R.$$

En intégrant ceci de 0 à t , on obtient

$$S(t, x) = S_0 \times e^{-\frac{\alpha}{\mu} R(t, x)},$$

qu'on peut insérer dans (ii) :

$$\partial_t I = d\Delta I + (\alpha S_0 e^{-\frac{\alpha}{\mu} R} - \mu) I.$$

On multiplie alors cette égalité par μ ce qui permet de faire apparaître R de la manière suivante

$$\begin{aligned} \partial_t^2 R &= d\Delta(\partial_t R) + (\alpha S_0 e^{-\frac{\alpha}{\mu} R} - \mu)(\partial_t R) \\ &= d\Delta(\partial_t R) - \mu S_0 (\partial_t (e^{-\frac{\alpha}{\mu} R})) - \mu(\partial_t R). \end{aligned}$$

En intégrant à nouveau entre 0 et t , il vient

$$\partial_t R = d\Delta R + \underbrace{\mu [S_0(1 - e^{-\frac{\alpha}{\mu} R}) - R]}_{\text{Notons } f(R) \text{ cette réaction.}} + \mu I|_{t=0}. \quad (1.100)$$

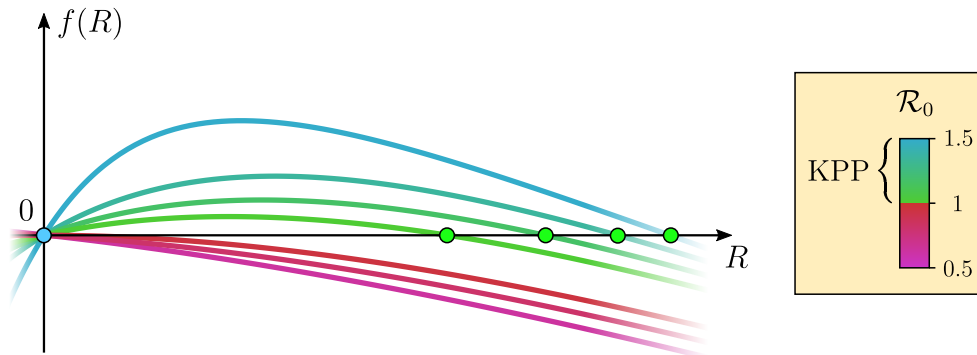
Plusieurs commentaires émergent de l'équation de réaction-diffusion (1.100) qui isole R . Remarquons tout d'abord que f est strictement concave et que

$$f(R) = (\alpha S_0 - \mu)R + o(R)$$

au voisinage de $R = 0$. Ainsi, f est de type KPP (cf. la Définition 1.8) si et seulement si $\alpha S_0 - \mu > 0$, c'est-à-dire, si le nombre de reproduction de base

$$\mathcal{R}_0 := \frac{\alpha}{\mu} S_0 \quad (1.101)$$

est strictement plus grand que 1. Dans ce cas, on note S^* la valeur de l'unique équilibre positif stable de f .



⁶¹Les calculs présentés à présent sont principalement inspirés de [61].

Figure 33 — Illustration des fonctions de réaction $f(R)$ pour plusieurs valeurs de \mathcal{R}_0 . f est de type KPP si et seulement si $\mathcal{R}_0 > 1$. Les valeurs des équilibres stables S^* sont représentées par les points vert (●).

On peut noter dans (1.100) la présence du terme $\mu I|_{t=0} = \mu \delta \mathbb{1}_{(-L,L)}$ qui va permettre à R de sortir de l'état identiquement nul dans lequel il se trouve au temps initial. Cette source, locale en espace, ne va pas perturber la propagation de R lorsqu'elle aura lieu, si bien qu'on a la dichotomie suivante :

- Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors R va envahir l'espace et se propager à vitesse

$$c := 2\sqrt{df'(0)} = 2\sqrt{d(\alpha S_0 - \mu)}. \quad (1.102)$$

- Si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors R va converger uniformément vers 0.

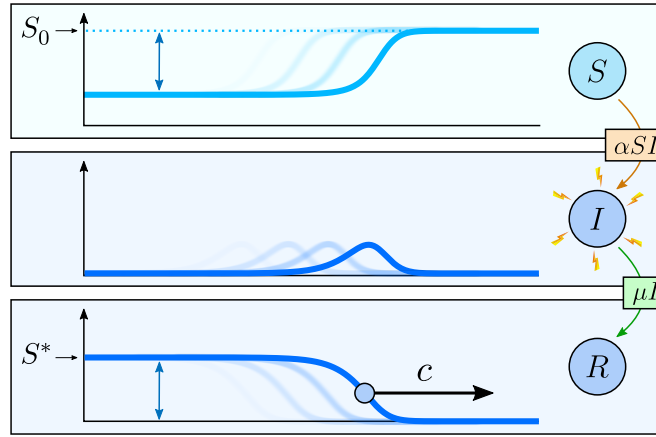


Figure 34 — Simulation d'une solution de (1.99) dans un cas propagatif — $\mathcal{R}_0 > 1$.

Avec l'ambition de développer une variante du modèle (1.99) préservant de telles dynamiques propagatives, nous nous intéressons à un couplage en chaîne des trois compartiments (S, I, R) . Plus précisément, en proposant de faire l'analogie entre contamination et apprentissage, on symbolise un ensemble de connaissances par l'ensemble des entiers \mathbb{N} que l'on munit de sa relation d'ordre usuelle : $n \in \mathbb{N}$ représente le $n^{\text{ième}}$ niveau de savoir — on peut, par exemple, dire que n est un nombre de mots connus. Les individus connaissant n mots peuvent typiquement se trouver dans deux états distincts : I_n ou S_n . Les individus I_n sont excités et font passer les individus S_{n-1} dans leur compartiment en leur apprenant le $n^{\text{ième}}$ mot. Au bout d'un certain temps, les individus I_n se calment en devenant S_n , et “quiescent” jusqu'à ce que les individus I_{n+1} les stimulent avec le mot suivant. Cette dynamique d'apprentissage est essentiellement représentée sur la Figure 35 ci-dessous et prend la forme du système suivant

$$\begin{cases} \partial_t S_0 = -\alpha_1 S_0 I_1, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t I_n = d_n \Delta I_n + \alpha_n S_{n-1} I_n - \mu_n I_n, & n \in \mathbb{N}^*, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t S_n = -\alpha_{n+1} S_n I_{n+1} + \mu_n I_n, & n \in \mathbb{N}^*, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.103)$$

qu'on munit d'une donnée initiale

$$\begin{cases} S_0|_{t=0} \equiv S_0^* \in \mathbb{R}_+^*, & x \in \mathbb{R}, \\ I_n|_{t=0} = I_n^0, & n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}, \\ S_n|_{t=0} \equiv 0, & n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.104)$$

Dans (1.104), les données I_n^0 sont choisies non-nulles, positives, bornées, et à support compact⁶², et on demande pour le moment uniquement la positivité des paramètres $(d_n, \alpha_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans (1.103).

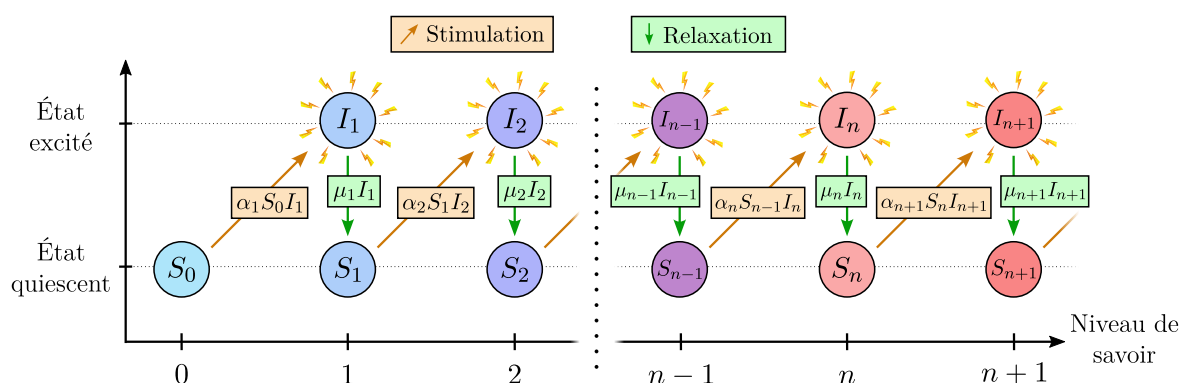


Figure 35 — Schéma de la dynamique propagative du système (1.103). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on représente par α_n la facilité d'apprentissage du $n^{\text{ième}}$ mot, tandis que $1/\mu_n$ traduit son temps moyen d'acquisition.

Le principal but de ce travail est d'identifier les critères déterminant la propagation ou le blocage du $n^{\text{ième}}$ niveau de connaissance, ainsi que, en cas d'invasion, sa vitesse de propagation et sa capacité d'accueil.

Pour entrer dans les détails, on définit les suites de propagation (S_n^*) , (c_n) , et (S_n^{**}) , qui vont contenir les principales caractéristiques propagatives de la solution :

- c_n représente la vitesse de propagation du $n^{\text{ième}}$ niveau,
- S_n^* représente la capacité d'apprentissage du $n^{\text{ième}}$ niveau (par analogie avec la capacité d'accueil),
- S_n^{**} représente la capacité des “laissés-pour-compte”⁶³ du $n^{\text{ième}}$ niveau.

⁶²On a, en effet, besoin que certains individus possèdent le $n^{\text{ième}}$ niveau de savoir si l'on veut qu'il se propage, puisque la nullité de I_n découple les $n - 1$ premiers niveaux de savoir des suivants — voir la Figure 35.

⁶³Certains individus n'ont, en effet, pas le temps d'apprendre le $n^{\text{ième}}$ mot, puisque la zone où I_n est significativement différente de 0 est un petit intervalle qui va translater à vitesse constante, comme on pourra le voir sur la Figure 36. Ces individus sont ainsi condamnés à rester bloqués au $n^{\text{ième}}$ niveau de connaissance.

Définition 1.20 (Suites de propagation) *Étant donné une valeur initiale positive S_0^* et une suite de valeurs positives $(d_n, \alpha_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on définit les suites de propagation (S_n^*) , (c_n) , et (S_n^{**}) . Ces suites sont construites de manière récursive et peuvent potentiellement être finies. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ pour lequel S_n^* existe, on considère le nombre de reproduction de base*

$$\mathcal{R}_{n+1} := \alpha_{n+1} S_n^* / \mu_{n+1}. \quad (1.105)$$

Si $\mathcal{R}_{n+1} > 1$, alors on détermine S_{n+1}^ comme l'unique solution positive de l'équation transcendante*

$$0 = S_n^* \left(1 - e^{-\frac{\alpha_{n+1}}{\mu_{n+1}} S_{n+1}^*} \right) - S_{n+1}^*, \quad (1.106)$$

et l'on pose

$$c_{n+1} := 2\sqrt{d_{n+1}(\alpha_{n+1} S_n^* - \mu_{n+1})}, \quad \text{et} \quad S_n^{**} := S_n^* - S_{n+1}^*. \quad (1.107)$$

Autrement, si $\mathcal{R}_{n+1} \leq 1$, alors (1.106) n'admet pas de solution positive, et les suites se terminent à S_n^ , c_n , et S_{n-1}^{**} respectivement. On définit $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ comme étant l'indice final de la suite (S_n^*) s'il est fini, et $+\infty$ autrement. Plus précisément,*

$$N = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid S_n^* \text{ est défini}\},$$

résultant en

$$(S_n^*) = (S_n^*)_{n \in \llbracket 0; N \rrbracket}, \quad (c_n) = (c_n)_{n \in \llbracket 1; N \rrbracket}, \quad \text{et} \quad (S_n^{**}) = (S_n^{**})_{n \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket}.$$

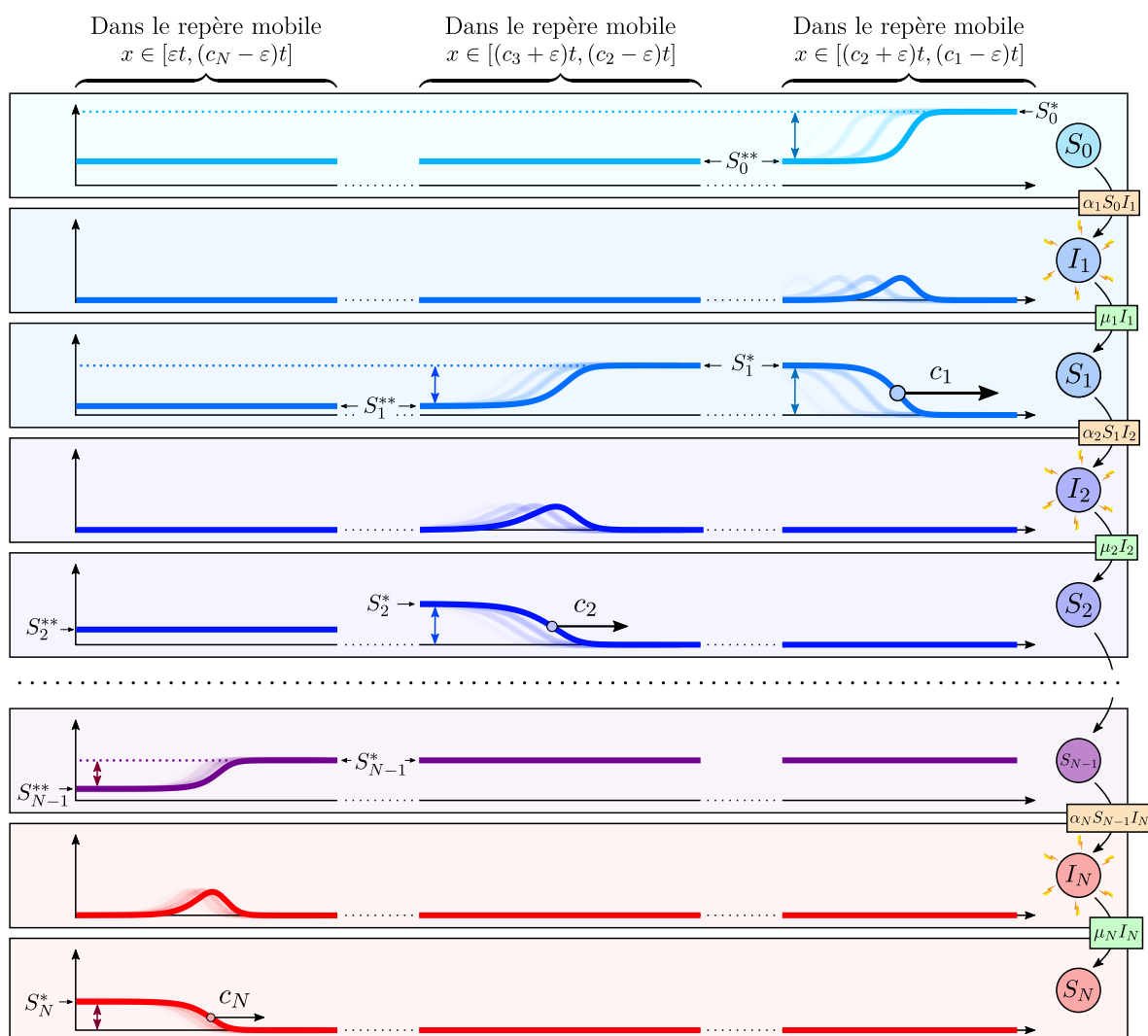


Figure 36 — Simulation du modèle (1.103)-(1.104) illustrant le comportement asymptotique de la solution dans différents repères mobiles.

On pourra remarquer dans la Définition 1.20 certaines ressemblances avec le SIR classique (1.99), notamment par la proximité entre

- \mathcal{R}_{n+1} (1.105) et \mathcal{R}_0 (1.101),
- c_n (1.107) et c (1.102),
- le second membre de (1.106) et $f(R)$ (1.100).

Pour que le résultat que nous cherchons à démontrer tienne, nous devons présupposer que la suite des vitesses (c_n) est strictement décroissante⁶⁴. Cette hypothèse permet de correctement ségréger les niveaux de connaissance, de sorte que dans le $n^{\text{ième}}$ repère mobile,

⁶⁴C'est par exemple le cas lorsque toutes les constantes sont prises égales à 1.

S_{n-1} , I_n et S_n se comportent essentiellement comme le font S , I et R dans le modèle classique, sans significativement interagir avec les autres composantes du système — voir la Figure 35. D'un point de vue de modélisation, cette hypothèse n'est finalement pas totalement irréaliste puisqu'on peut bien imaginer que la difficulté d'acquisition des niveaux de connaissances supérieurs ne va qu'en augmentant.

Sous cette hypothèse de décroissance sur (c_n) , nous travaillons à montrer que chaque niveau de connaissance n de $\llbracket 1; N \rrbracket$ va se propager à vitesse c_n , et que tout niveau supérieur va être bloqué et disparaître uniformément en espace. Pour être plus précis, on s'attend à avoir le résultat suivant.

Théorème 1.21 (Description de la propagation des solutions de (1.103)) *Soit $(S_0, (I_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ la solution (1.103)-(1.104). Supposons que S_0^* et $(d_n, \alpha_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soient tels que la suite (c_n) définie plus haut soit strictement décroissante. Alors on a*

- *propagation des N premiers niveaux de savoir : pour tout $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et tout $\varepsilon \in \left(0, \frac{c_n - c_{n+1}}{2}\right)$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ |S_n(t, x)| \text{ tels que } |x| > (c_n + \varepsilon)t \right\} \right] = 0, \quad (\text{i})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ |S_n(t, x) - S_n^*| \text{ tels que } (c_{n+1} + \varepsilon)t < |x| < (c_n - \varepsilon)t \right\} \right] = 0, \quad (\text{ii})$$

- *apprentissage vers le niveau de savoir suivant : pour tout $n \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$ et tout $\varepsilon \in (0, c_{n+1})$,*

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ |S_n(t, x) - S_n^{**}| \text{ tels que } \delta < |x| < (c_{n+1} - \varepsilon)t \right\} \right] = 0, \quad (\text{iii})$$

- *disparition de tous les niveaux de savoir supérieurs à N : pour tout $n > N$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(t, x)| \right] = 0. \quad (\text{iv})$$

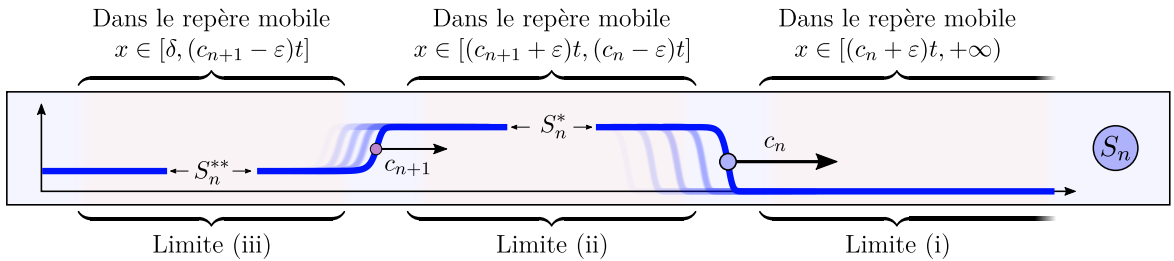


Figure 37 — Forme asymptotique de S_n dans un cas de propagation — $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$.

1.3.2 Réaction-diffusion en demi-espace en présence d'un piston

L'idée de la perspective présentée ici a émergé du travail sur l'équation de la chaleur en demi-espace, préliminaire aux résultats de [6] (voir la sous-section 1.1.4), ainsi que de certaines réflexions sur les travaux de Jane Allwright [11], [12], portant sur les équations de réaction-diffusion dont le domaine dépend du temps. Ce contexte peut également faire écho aux questions d'optimum mobiles et de niches écologiques translatées par le climat, cf. [68], [69], [127], ou encore à certaines stratégies de lutte contre les espèces invasives *via* des méthodes de confinement mobiles (rolling carpet) [13].

Le problème que l'on considère ici est de voir comment la présence d'une frontière mobile peut affecter le comportement des solutions d'équations de réaction-diffusion posées en demi-espace :

$$\partial_t u = d\partial_{xx}u + f(u), \quad t > 0, \quad x > b(t), \quad (1.108)$$

où la fonction du temps b est croissante, continûment dérivable, et vaut 0 au temps initial. En imposant la bonne condition de bord en $x = b(t)$ de manière à préserver la masse de la solution lorsque $f \equiv 0$, on peut imaginer que les individus vont s'agglomérer à la frontière⁶⁵, ce qui pourrait éventuellement sauver certaines populations de l'extinction en présence d'un effet Allee faible — voir la sous-section 1.1.8 — comme le suggère la figure qui suit.

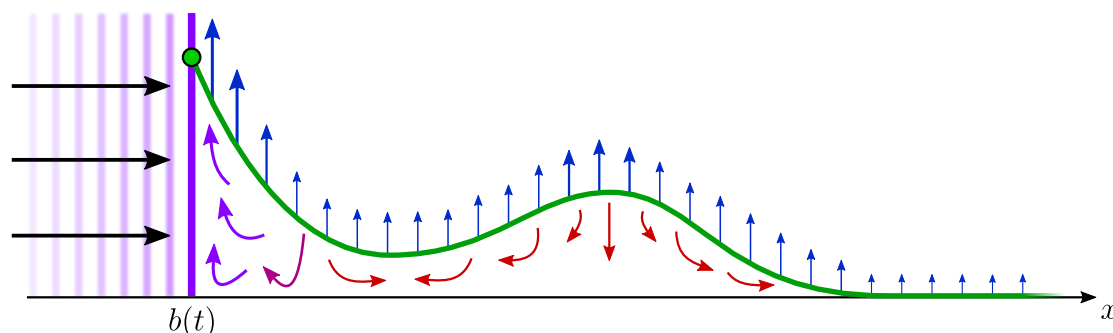


Figure 38 — Tendances variationnelles apportées par la réaction (en bleu), la diffusion (en rouge) et la frontière mobile (en violet) pour une solution de (1.108).

En cherchant à exprimer la conservation de la masse $M(t) = \int_{b(t)}^{\infty} u(t, z) dz$ pour le problème diffusif associé à (1.108), il vient

$$M'(t) = -b'(t)u(t, b(t)) - d\partial_x u(t, b(t)),$$

dont l'annulation nous donne la condition sur le flux positivement entrant dans le domaine

$$-d\partial_x u|_{x=b(t)} = b'(t)u|_{x=b(t)}. \quad (1.109)$$

Il est intéressant de noter que ce sont des conditions de Robin qui apparaissent pour préserver la masse de la solution, l'habitude nous orientant généralement vers les conditions de Neumann. Cela fait malgré tout sens, si l'on imagine les conditions de Neumann

⁶⁵D'où le terme "piston".

homogènes comme un équilibre entre les individus entrants et les individus sortants : en faisant translater la frontière, on biaise cet équilibre en faveur des individus sortants. La condition de Robin permet alors de rectifier ce biais de flux. Le problème s'écrit ainsi

$$\begin{cases} \partial_t u = d\partial_{xx}u, & t > 0, \quad x > b(t), \\ -d\partial_x u = b'(t)u, & t > 0, \quad x = b(t), \end{cases} \quad (1.110)$$

qu'on munit d'une donnée $u_0 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ bornée et intégrable. Notons que des problèmes proches, mais distincts en raison de leur approche "frontière libre", ont été étudiés par J.Berestycki, Brunet et Derrida [25] et par Du et Lin [59].

Une des première idées que l'on peut avoir en considérant (1.110) est de faire le changement de variable $v(t, x) := u(t, x + b(t))$ pour se ramener au domaine fixe $\{x > 0\}$. On paie cette simplification sur le domaine par un drift en direction de la frontière dans l'équation intérieure de v :

$$\begin{cases} \partial_t v = d\partial_{xx}v + b'(t)\partial_x v, & t > 0, \quad x > 0, \\ -d\partial_x v = b'(t)v, & t > 0, \quad x = 0. \end{cases} \quad (1.111)$$

Ce type de problème d'advection-diffusion sur la demi-droite réelle dont le terme d'advection dépend du temps pourra faire écho aux travaux de Calvez, Hawkins et Meunier [37] et de Lepoutre, Meunier et Muller [100].

Dérive linéaire de la frontière Le cas le plus simple que l'on puisse imaginer pour la fonction de dérive b est le cas linéaire $b(t) = ct$.

$$\begin{cases} \partial_t u = d\partial_{xx}u, & t > 0, \quad x > ct, \\ -d\partial_x u = cu, & t > 0, \quad x = ct. \end{cases} \quad (1.112)$$

Les premières simulations numériques suggèrent que la solution u converge vers une exponentielle décroissante et immobile dans $\{x > ct\}$, ce qui nous pousse à donner une notion de solution stationnaire pour les solutions de (1.110).

Définition 1.22 (Solution stationnaire de (1.110)) *Si $b'_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} b'(t)$ existe, on dit que*

$$U : \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0 \text{ et } x > b(t)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une solution stationnaire pour (1.110) s'il existe $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^)$ telle que, pour tout $t > 0$, $U(t, x) = V(x - b(t))$, et*

$$\begin{cases} dV'' + b'_\infty V' = 0, & x > 0, \\ -dV' = b'_\infty V, & x = 0. \end{cases} \quad (1.113)$$

À la vue de cette définition, on peut facilement vérifier que les solutions stationnaires de (1.112) sont effectivement de la forme $U_\lambda(t, x) = \lambda e^{-\frac{c}{d}(x-ct)}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et l'on s'attend alors à ce que les solutions de (1.112) convergent vers U_λ , avec $\lambda = \frac{c}{d} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_+^*)}$ pour accorder les masses.

Ce résultat de convergence vers les solutions stationnaires est à vrai dire un peu plus subtil que cela, comme nous allons maintenant l'observer. On peut tout d'abord donner une forme explicite aux solutions de (1.112) en utilisant une méthode de prolongement similaire à celle énoncée en sous-section 1.1.4 : on cherche \tilde{u}_0 de sorte que la solution \tilde{u} de

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} = d \partial_{xx} \tilde{u}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}|_{t=0} \equiv \tilde{u}_0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.114)$$

vérifie la condition de Robin $-d \partial_x \tilde{u} = c \tilde{u}$ en $x = ct$ pour tout $t > 0$. Ceci nous amène à écrire l'EDO linéaire suivante pour \tilde{u}_0 :

$$d \partial_x \tilde{u}_0(x) + c \tilde{u}_0(x) = -e^{-\frac{c}{d}x} \left[d \partial_x u_0(-x) + c u_0(-x) \right], \quad \forall x < 0, \quad (1.115)$$

dont la résolution donne

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & \text{si } x > 0, \\ e^{-\frac{c}{d}x} \left[u_0(-x) + \frac{c}{d} \int_0^{-x} u_0(z) dz \right], & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Enfin, en détaillant la convolution de cette donnée initiale \tilde{u}_0 contre le noyau de la chaleur G , on a finalement

$$\tilde{u}(t, x) = \int_{z=0}^{\infty} \underbrace{\left[G(t, x-z) + e^{\frac{c}{d}z} G(t, x+z) + \frac{c}{d} \int_{y=z}^{\infty} e^{\frac{c}{d}y} G(t, x+y) dy \right]}_{\text{Notons cela } H(t, x, z), \text{ c'est la solution fondamentale de (1.112)}} u_0(z) dz. \quad (1.116)$$

En remarquant maintenant qu'en tant que solution de l'équation de la chaleur sur la droite réelle, $U_\lambda(t, x)$ peut s'écrire

$$U_\lambda(t, x) = \lambda e^{-\frac{c}{d}(x-ct)} = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-z) \times \lambda e^{-\frac{c}{d}z} dz,$$

on a

$$\tilde{u}(t, x) - U_\lambda(t, x) = \int_{z=0}^{\infty} G(t, x-z) \left[u_0(z) - \lambda e^{-\frac{c}{d}z} \right] dz \quad (1.117)$$

$$+ \int_{z=-\infty}^0 G(t, x-z) e^{-\frac{c}{d}z} u_0(-z) dz \quad (1.118)$$

$$+ \int_{z=-\infty}^0 G(t, x-z) e^{-\frac{c}{d}z} \underbrace{\left[\frac{c}{d} \int_{y=0}^{-z} u_0(y) dy - \lambda \right]}_{=:\varphi(-z)} dz. \quad (1.119)$$

En tenant alors compte du fait que $x > ct$, $z > 0$ et de l'intégrabilité de u_0 , on peut facilement montrer que (1.117) et (1.118) sont des $O(1/\sqrt{t})$. Pour pouvoir faire de même avec (1.119), il faut demander que φ soit intégrable. Pour cela, on doit nécessairement imposer $\lambda = \frac{c}{d} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_+^*)}$ pour permettre à φ de disparaître lorsque $z \rightarrow \infty$. Cela donne

$$\varphi(z) = \frac{c}{d} \int_{y=z}^{\infty} u_0(y) dy.$$

Par le théorème de Fubini, on peut alors voir que

$$\int_{z=0}^{\infty} \varphi(z) dz \text{ est fini} \iff \int_{y=0}^{\infty} y u_0(y) dy \text{ est fini.}$$

Cette apparition du premier moment de u_0 fait sens puisqu'on peut imaginer que la frontière translatante du domaine perd de son efficacité d'agrégation si la masse de la donnée est "trop éparpillée" sur \mathbb{R}_+^* .

On résume les résultats de ce paragraphe dans la proposition suivante.

Proposition 1.23 (Comportement des solutions de (1.112)) *Soit u la solution de (1.112) munie d'une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, alors u s'écrit explicitement sous la forme donnée par (1.116).*

Par ailleurs, si u_0 possède un premier moment, alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u(t, \cdot + ct) - \lambda e^{-\frac{c}{d}\cdot}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^*)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}},$$

où $\lambda := \frac{c}{d} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}_+^*)}$.

La question de la convergence de la solution vers U_λ dans les cas où la donnée u_0 ne possède pas de premier moment, reste ouverte pour l'instant.

Dérive sur- et sous-linéaire de la frontière Dans la suite, on s'intéresse aux cas où $b(t)$ prend la forme algébrique $b(t) = ct^\beta$, où β est une constante positive :

$$\begin{cases} \partial_t u = d \partial_{xx} u, & t > 0, \quad x > ct^\beta, \\ -d \partial_x u = c \beta t^{\beta-1} u, & t > 0, \quad x = ct^\beta, \end{cases} \quad (1.120)$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} \partial_t v = d \partial_{xx} v + c \beta t^{\beta-1} \partial_x v, & t > 0, \quad x > 0, \\ -d \partial_x v = c \beta t^{\beta-1} v, & t > 0, \quad x = 0. \end{cases} \quad (1.121)$$

- Lorsque $\beta < 1$, on peut observer dans (1.121) que $c \beta t^{\beta-1}$ va disparaître en temps long si bien qu'on s'attend à ce que v possède un comportement semblable à celui de l'équation de la chaleur sur la demi-droite réelle munie d'une condition de Neumann en $x = 0$ en temps long.
- Lorsque $\beta > 1$, on peut imaginer que la frontière va se déplacer beaucoup plus rapidement que la majorité des individus et va en quelque sorte "ratisser" la population, ce qui aura pour effet de concentrer la masse de la population en l'origine.

Ces hypothèses vraisemblables sont corroborées par les simulations numériques dont un aperçu est donné sur la Figure 39.

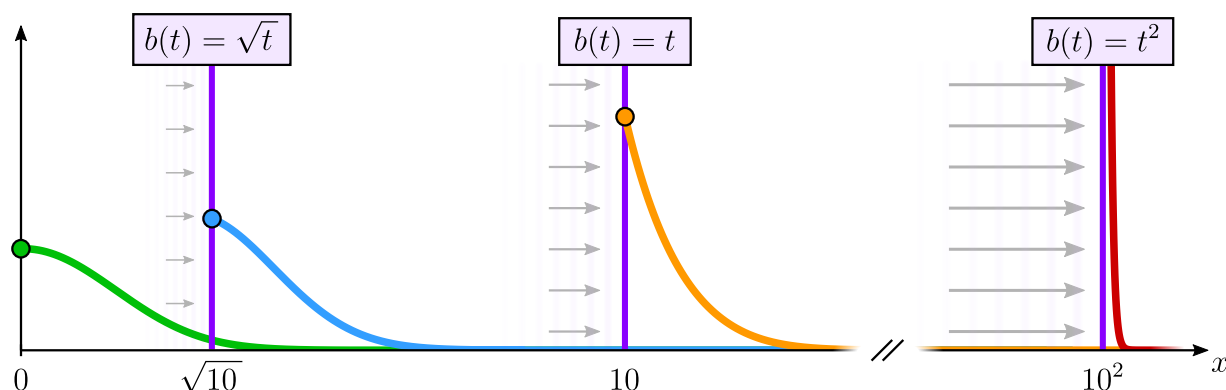


Figure 39 — Instantanés à $t = 10$ de quatre simulations⁶⁶ de (1.110) pour $b(t) = 0$ (en vert), $b(t) = \sqrt{t}$ (en bleu), $b(t) = t$ (en orange) et $b(t) = t^2$ (en rouge), partant de la donnée initiale $u_0 \equiv \mathbf{1}_{(5,10)}$. Le premier cas correspond à des conditions de type Neumann. Le deuxième cas, en racine carrée, semble se comporter comme le cas Neumann en temps long — voir plus bas pour le taux de décroissance. Le troisième cas linéaire possède effectivement la forme exponentielle attendue — voir le paragraphe précédent. Enfin le quatrième cas quadratique exhibe une accumulation des individus à la frontière.

Pour aller plus loin dans les simulations numériques, on peut regarder l'accroissement de la solution v entre les deux derniers temps en échelle log-log au point $x = 0$, ce qui permet d'estimer le taux de variation algébrique α des solutions. Quelques exemples pour différentes valeurs de β sont données sur la Figure 40.

β	c	L	δx	T	$\alpha = \frac{\log(v(T,0)) - \log(v(T-\delta t,0))}{\log(T) - \log(T-\delta t)}$
0	0	1000	10^{-2}	10	-0.50
0.5	1	1000	10^{-2}	10	-0.50
0.6	1	1000	10^{-2}	10	-0.49
0.8	1	1000	10^{-2}	10	-0.46
0.9	1	1000	10^{-2}	10	-0.42
1	1	10	10^{-2}	100	0.00
2	1	10	10^{-4}	40	1.00
2.3	1	10	10^{-4}	40	1.30
3	1	10	10^{-5}	10	2.00
4	1	10	10^{-5}	10	3.00

Figure 40 — Évaluation des taux de variation temporel de $v(t,0)$ à $t = T$ des solutions de (1.120) pour différentes valeurs de c et de β . Ici, $d = 100$, $\delta t = 10^{-2}$ et $u_0 \equiv \mathbf{1}_{(0,\delta x)}$.

⁶⁶On utilise un schéma aux différences finies implicite sur le problème à domaine immobile associé (1.111), avec $d = 10$ et $\delta x = \delta t = 10^{-2}$. La demi-droite réelle est tronquée en $x = L = 1000$ (essentiellement “loin” de la masse des solutions), où des conditions de Robin permettant de préserver la masse sont imposées.

Sur la Figure 40, les paramètres L , δx et T sont adaptés de manière à ce que la simulation reste au plus proche de la réalité pour $t \in [0, T]$. Lorsque $\beta < 1$ la densité s'éparpille ce qui fait qu'on a besoin d'avoir L suffisamment grand pour qu'une faible proportion d'individus côtoie la frontière artificielle en $x = L$. Lorsque $\beta \geq 1$, la densité reste à l'inverse concentrée proche la frontière gauche ce qui fait qu'on peut prendre L relativement petit. Le pas d'espace doit en revanche être amoindri dans ce cas afin de capturer le "spike" à l'origine lorsque $\beta > 1$ (voir la courbe rouge sur la Figure 39). On pourra remarquer que le taux de variation a du mal à converger dans les cas $\beta = 0.8$ et $\beta = 0.9$, ceci étant dû à la convergence ralentie de $t^{\beta-1}$ vers 0 lorsque β est proche de 1 — voir (1.121).

À la vue de ces observations numériques, on peut faire la conjecture suivante.

Conjecture 1.24 (Taux de variation asymptotique des solutions de (1.120)) *Soient c, d, β positifs, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ et u la solution de (1.120) munie de la donnée initiale u_0 .*

- Si $\beta < 1$, alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u(t, \cdot + ct^\beta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^*)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

- Si $\beta \geq 1$, alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|u(t, \cdot + ct^\beta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^*)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} Ct^{\beta-1}.$$

1.3.3 Exclusion simple pour des opérateurs de diffusion fractionnaires

On aborde dans cette dernière sous-section certaines équations de diffusion

$$\partial_t u = \mathcal{L}u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.122)$$

où l'opérateur \mathcal{L} fait intervenir les Laplaciens fractionnaires d'ordre $s \in (0, 1)$. Ces opérateurs peuvent être définis (à une constante multiplicative près) de la manière suivante⁶⁷ :

$$-(-\Delta)^s f(x) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)}{|y|^{1+2s}} dy. \quad (1.123)$$

Concernant les cas limites lorsque s tend vers 0 et 1 on a

$$\lim_{s \searrow 0} (-\Delta)^s f = f \quad \text{et} \quad \lim_{s \nearrow 1} (-\Delta)^s f = -\Delta f \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}),$$

dont on peut se convaincre en observant la définition de $(-\Delta)^s$ par la transformée de Fourier :

$$(-\Delta)^s f := \mathcal{F}^{-1} \left[\xi \mapsto |\xi|^{2s} \widehat{u}(\xi) \right]. \quad (1.124)$$

⁶⁷Voir [1] ou [45] pour d'autres définitions équivalentes.

Pour des raisons pratiques, on pose pour la suite $(-\Delta)^0 := \text{Id}$ et $(-\Delta)^1 := -\Delta$.

Dans le même esprit que dans la sous-section 1.1.2, on peut commencer par dériver (1.122) à partir de limites de marches aléatoires sur la droite réelle dans le cas où $\mathcal{L} = -(-\Delta)^s$. Cette démarche s'inspire essentiellement de [1, page 22] où un cadre plus général est traité.

En considérant donc un individu vivant sur le réseau $\delta_x \mathbb{Z} := \{z\delta_x \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{Z}\}$, changeant de position à tous les temps discrets $n\delta_t$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on donne cette fois-ci la possibilité à l'individu de sauter sur n'importe quel autre site du réseau avec une probabilité non nulle. Plus précisément, si l'individu se situe au site x à l'instant t , alors la probabilité pour qu'il se trouve au site $y = x + z\delta_x$ au temps discret suivant $t + \delta_t$ ne dépend que du nombre de sauts $|z|$ séparant x et y ⁶⁸ et vaut, pour tout $z \in \mathbb{Z}$,

$$p(x; x + z\delta_x) := \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0, \\ C/|z|^{1+2s} & \text{si } z \neq 0, \end{cases} \quad (1.125)$$

où la constante C est choisie de sorte à ce que $p(x; x + \cdot \delta_x)$ soit une mesure de probabilité sur \mathbb{Z} :

$$C := \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|z|^{1+2s}} \right)^{-1}.$$

On pourra noter que $p(x; x + \cdot \delta_x)$ est d'espérance nulle et de variance infinie pour tout $s \in (0, 1)$.

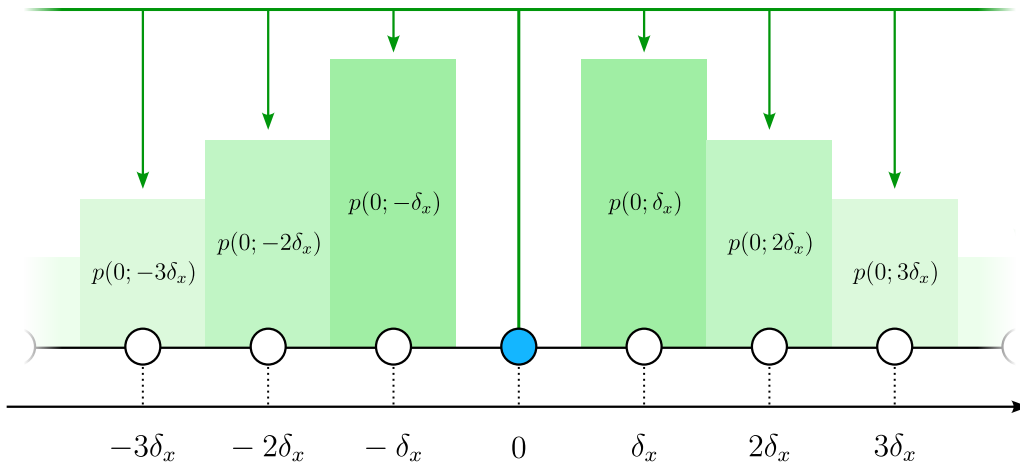


Figure 41 — Schéma de la marche aléatoire servant de base pour la dérivation de l'équation de la chaleur fractionnaire. À chaque temps discret, l'individu se situant au site x choisit un site $x + z\delta_x$ sur l'entière du réseau $\delta_x \mathbb{Z}$ avec probabilité $p(x; x + z\delta_x)$, sur lequel il saute au temps discret suivant.

⁶⁸C'est bien le nombre de sauts, et non la distance entre x et y .

1.3. Perspectives

En notant à présent $u(t, x)$ la probabilité que l'individu se situe au site x et à l'instant t , il vient de la formule des probabilités totales

$$u(t + \delta_t, x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} p(x; x + z\delta_x) \times u(t, x + z\delta_x) = C \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} \frac{u(t, x + z\delta_x)}{|z|^{1+2s}}.$$

On a alors

$$\frac{u(t + \delta_t, x) - u(t, x)}{\delta_t} = \frac{C}{\delta_t} \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} \frac{u(t, x + z\delta_x) - u(t, x)}{|z|^{1+2s}} \quad (1.126)$$

$$= \frac{C}{2\delta_t} \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} \frac{u(t, x + z\delta_x) + u(t, x - z\delta_x) - 2u(t, x)}{|z|^{1+2s}} \quad (1.127)$$

$$= C \frac{\delta_x^{2s}}{\delta_t} \left[\frac{\delta_x}{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}^*} \frac{u(t, x + z\delta_x) + u(t, x - z\delta_x) - 2u(t, x)}{|z\delta_x|^{1+2s}} \right], \quad (1.128)$$

où l'on a utilisé le fait que p est une probabilité pour écrire (1.126), puis que $\sum_z = \frac{1}{2}(\sum_z + \sum_{\tilde{z}})$ avec $\tilde{z} := -z$ dans la deuxième somme pour passer de (1.126) à (1.127) — la symétrie de p joue son rôle ici. En s'assurant de préserver le ratio *fractionnaire*

$$\frac{\delta_x^{2s}}{2\delta_t} = d, \quad (1.129)$$

on peut alors prendre la limite $\delta_x, \delta_t \rightarrow 0$ dans (1.128) en remarquant que la somme de Riemann entre crochets converge vers l'intégrale de (1.123). Cela donne alors l'équation de la chaleur fractionnaire sur la densité de probabilité u :

$$\partial_t u = -d(-\Delta)^s u, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (1.130)$$

Dans son travail de 2009 [92], Jara parvient à dériver l'équation de diffusion fractionnaire (1.130) à partir d'un processus d'exclusion simple. Son résultat va dans la même direction que celle de la marche aléatoire considérée plus haut : on considère un processus d'exclusion simple qui évolue sur l'espace d'états $S := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$,⁶⁹ sur lequel on fait s'échanger les statuts d'occupation de chaque paire de sites $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ à taux $C/|i - j|^{1+2s}$. La dynamique doit par la suite être accélérée en N^{2s} pour permettre la convergence — en accord avec le ratio fractionnaire (1.129). Le générateur du processus prend ainsi la forme suivante⁷⁰ :

$$(Lf)(\eta) = CN^{2s} \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|i - j|^{1+2s}} [f(\eta^{i, j}) - f(\eta)], \quad \forall \eta \in S, \quad (1.131)$$

⁶⁹Notons qu'à la différence de l'équation de la chaleur sur le tore et du modèle champ-route sur le cylindre, on travaille ici en volume infini (domaine non borné). De fait, quelques adaptations des définitions et des objets sont nécessaires.

⁷⁰On pourra prendre le générateur (1.16) pour l'équation de la chaleur sur le tore comme point de comparaison.

qu'on définit pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ de sorte que $f(\eta)$ ne dépend que des valeurs de $\{\eta(i) \in S \mid i \in \llbracket -M; M \rrbracket\}$. Avant d'énoncer le résultat de limite hydrodynamique de Jara, on se doit d'adapter au présent contexte les définitions de *suite de mesures associées à une densité initiale* (Définition 1.2), de *mesure empirique* (1.19) ainsi que de *solution faible pour* (1.130).

Définition 1.25 (Suite de mesures associées à un profil de densité en volume infini) *Étant donné une fonction mesurable $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, on dit qu'une suite de probabilités initiales $(\mu_N)_{N \geq 1}$ sur S est associée au profil de densité u_0 si, pour toute fonction test continue à support compact $G \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, et tout $\delta > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\mu_N \left(\left\{ \eta \in S \text{ tels que } \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} G(i/N) \eta(i) - \int_{z \in \mathbb{R}} G(z) u_0(z) dz \right| > \delta \right\} \right) \right] = 0. \quad (1.132)$$

Définition 1.26 (Mesure empirique associée à un état en volume infini) *Étant donné un état $\eta \in S$, on définit pour $N \geq 1$ la mesure empirique π_N sur \mathbb{R} par*

$$\pi_N(\eta) := \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta(i) \times \delta_{i/N}, \quad (1.133)$$

où $\delta_{i/N}$ représente la mesure de Dirac chargeant le point $i/N \in \mathbb{R}$.

De même, si $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$ est un processus markovien de sauts sur S , on note $(\pi_N(t))_{t \in [0, T]}$ le processus de mesures empiriques associé.

Définition 1.27 (Être solution de (1.130)) *Fixons un horizon temporel $T > 0$ et donnons-nous une donnée initiale $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap [0, 1]^{\mathbb{R}}$. On dit que $u \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}))$ est une solution faible de (1.130) partant de la donnée u_0 si, pour toute fonction test à support compact $G \in \mathcal{C}_c^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ et tout $t \in [0, T]$, u vérifie la formulation faible suivante :*

$$\langle u(t), G(t) \rangle - \langle u_0, G(0) \rangle = \int_0^t \langle u(s), \partial_s G(s) - d(-\Delta)^s G(s) \rangle ds, \quad (1.134)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire L^2 dans \mathbb{R} , et où les dépendance en espace ont été omises pour plus de clarté.

L'intégration par parties utilisée pour écrire (1.134) à partir de (1.130) est une conséquence directe de la définition du Laplacien fractionnaire par la transformée de Fourier (1.124). Notons au passage que, pour tout $0 < s \leq 1$, l'insertion d'une suite $(G_n = G_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions lisses à support compact et telles que $G_n|_{x \in [-n, n]} \equiv 1$ dans (1.134) exprime à la limite la préservation de la masse des solutions de (1.130) dès que u_0 est intégrable.

On peut maintenant passer au théorème de la limite hydrodynamique qui s'énonce comme ceci :

Théorème 1.28 (Jara, 2009, [92], Limite hydrodynamique pour l'équation de la chaleur fractionnaire) *Donnons-nous un horizon temporel $T > 0$. Soit $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une donnée initiale mesurable, et $(\mu_N)_{N \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur les espaces d'états S associée à u_0 au sens de la Définition 1.25. Soit $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$ le processus initié par μ_N et poussé par la dynamique associée au générateur L défini dans (1.131).*

Alors la suite processus de mesures empiriques $(\pi_N(t))_{t \in [0, T]}$ associée à $(\eta_t)_{t \in [0, T]}$ et définie par

$$(\pi_N(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_t(i) \times \delta_{i/N},$$

converge en probabilité vers le processus de mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue

$$(\pi(t, dx))_{t \in [0, T]} = (u(t, x) dx)_{t \in [0, T]},$$

dont la densité u est l'unique solution faible, au sens de la Définition 1.27, de l'équation de la chaleur fractionnaire (1.130) munie de la donnée initiale u_0 .

Dans une série de travaux récents de Dipierro, Valdinoci *et al.* [57], [56], [55], les auteurs considèrent certains opérateurs superposant différents Laplaciens fractionnaires. Pour clarifier les idées, donnons tout de suite un premier exemple d'un tel opérateur :

$$\mathcal{L} := \alpha \Delta - (1 - \alpha)(-\Delta)^{1/2}, \tag{1.135}$$

où la constante d'interpolation α est prise dans $(0, 1)$. Il pourrait être intéressant d'essayer de dériver l'équation de la chaleur associée à (1.135) à partir de marches aléatoires. Du point de vue de l'exclusion simple, on imagine bien que les travaux de Jara dans [92] présentés plus haut peuvent s'adapter à ce contexte en prenant la dynamique engendrée par le générateur

$$(Lf)(\eta) = \underbrace{\alpha N^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} [f(\eta^{i, i+1}) - f(\eta)]}_{=:(L_1 f)(\eta)} + (1 - \alpha) \underbrace{N \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} \frac{C}{|i-j|^2} [f(\eta^{i, j}) - f(\eta)]}_{=:(L_{1/2} f)(\eta)}.$$

Dans un contexte plus général, considérons une mesure de probabilité σ sur $[0, 1]$ et posons l'opérateur

$$\mathcal{L} := \int_0^1 -(-\Delta)^s d\sigma(s). \tag{1.136}$$

On pourra, dans un premier temps, remarquer que (1.135) correspond à (1.136) dans le cas où $\sigma = \alpha \delta_1 + (1 - \alpha) \delta_{1/2}$. En supposant que σ se décompose en la somme d'une mesure

atomique et d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^{71}$:

$$\sigma = \sigma_\lambda + \sigma_\delta,$$

on s'intéresse au problème diffusif $\partial_t = \mathcal{L}$ engendré par (1.136). Lorsque σ est uniquement composée d'atomes (i.e. lorsque $\sigma_\lambda = 0$), on peut penser que la dérivation microscopique de ce problème diffusif sera similaire à celle du cas (1.135). En revanche, le cas où $\sigma(ds) = g(s)ds$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e. lorsque $\sigma_\delta = 0$) est plus intrigant. Il est, en effet, moins évident d'imaginer la dynamique particulière permettant d'atteindre ce genre de problème diffusif. On peut penser que le générateur du processus d'exclusion simple associé s'écrirait

$$(Lf)(\eta) = \int_0^1 g(s) N^{2s} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \frac{C(s)}{|i-j|^{1+2s}} \left[f(\eta^{i,j}) - f(\eta) \right] ds.$$

Il semble qu'aucune dynamique de ce type n'ait encore été considérée dans la littérature à ce jour, ce qui ouvre d'inspirantes perspectives pour la suite.

⁷¹i.e. σ ne possède pas de partie singulière non atomique.

CHAPTER 2

Bridging Bulk and Surface: An Interacting Particle System towards the Field-Road Diffusion Model

We recover the so-called field-road diffusion model as the hydrodynamic limit of an interacting particle system. The former consists of two parabolic PDEs posed on two sets of different dimensions (a “field” and a “road” in a population dynamics context), and coupled through exchange terms between the field’s boundary and the road. The latter stands as a Symmetric Simple Exclusion Process (SSEP): particles evolve on two microscopic lattices following a Markov jump process, with the constraint that each site cannot host more than one particle at the same time. The system is in contact with reservoirs that allow to create or remove particles at the boundary sites. The dynamics of these reservoirs are slowed down compared to the diffusive dynamics, to reach the reactions and the boundary conditions awaited at the macroscopic scale. This issue of bridging two spaces of different dimensions is, as far as we know, new in the hydrodynamic limit context, and raises perspectives towards future related works.

This Chapter corresponds to a work written with [Matthieu Alfaro](#) and [Mustapha Mourragui](#) [9], submitted soon.

Sommaire du chapitre

2.1 Introduction	86
2.2 Notations and main result	89
2.3 Martingales and tightness	98
2.4 Characterization of the limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$	102

2.5 Uniqueness of the solution	109
2.A Appendix	110
Table of notations	125

2.1 Introduction

The goal of the present work is to derive the *field-road diffusion model* as the hydrodynamic limit of an interacting particle system. The former was introduced by Berestycki, Roquejoffre and Rossi [22] in order to describe spread of diseases or invasive species in presence of networks with accelerated propagation. It consists of two parabolic PDEs posed on two sets of different dimensions (a field and a road in a population dynamics context), and coupled through exchange terms between the field's boundary and the road — see subsection 2.1.1 for details. To asymptotically retrieve this deterministic model from a stochastic interacting particle system, we consider a Symmetric Simple Exclusion Process (SSEP) which evolves both on a finite discrete cylinder (the field) and its lower boundary (the road). Characterizing the SSEP, the microscopic dynamics is tied with a *simple exclusion rule* that forces each site to host at most one particle at the same time. To manage in particular the coupling between the field and the road, the system is in contact with reservoirs that allow to create or remove particles at the boundary sites of the cylinder. The activity of these reservoirs is slowed down compared to the diffusive dynamics, in order to align with the exchange terms awaited at the macroscopic scale. The originality of our analysis stands in the coupling between two domains of different dimensions, an issue that, as far as we know, has never been considered when recovering diffusive PDEs as the hydrodynamic limit of exclusion processes — see subsection 2.1.2.

2.1.1 The field-road model for fast diffusion channels

Recently, there has been a growing recognition of the importance of *fast diffusion channels* on biological invasions: for instance, an accidental transportation via human activities of some individuals towards northern and eastern France may be the cause of accelerated propagation of the pine processionary moth [125]. In Canada, some GPS data revealed that wolves travel faster along seismic lines (i.e. narrow strips cleared for energy exploration), thus increasing their chances to meet a prey [109]. It is also acknowledged that fast diffusion channels (roads, airlines, etc.) play a central role in the propagation of epidemics. As is well known, the spread of the black plague, which killed about a third of the European population in the 14th century, was favoured by the trade routes, especially the Silk Road, see [130]. More recently, some evidences of the the radiation of the COVID epidemic along highways and transportation infrastructures were found [81].

In this context, the *field-road model* introduced by Berestycki, Roquejoffre and Rossi

[22] writes as

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v + f(v), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{p-1}, \quad y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \alpha u - \beta v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{p-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u + \beta v|_{y=0} - \alpha u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{p-1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

The mathematical problem then amounts to describing survival and propagation in a non-standard physical space: the geographical domain consists in the half-space (the “field”) $x \in \mathbb{R}^{p-1}$, $y > 0$, bordered by the hyperplane (the “road”) $x \in \mathbb{R}^{p-1}$, $y = 0$. In the field, individuals diffuse with coefficient $d > 0$ and their density is given by $v = v(t, x, y)$. In particular Δv has to be understood as $\Delta_x v + \partial_{yy} v$. On the road, individuals typically diffuse faster ($D > d$) and their density is given by $u = u(t, x)$. In particular Δu has to be understood as $\Delta_x u$. The exchanges of population between the road and the field are described by the second equation in system (2.1), where $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. These boundary conditions, and the zeroth-order term on the road, link the field and the road equations and are the core of the model (see also the *volume-surface* systems [43], **FellnerWellposedness18a**, [62] in the context of chemical processes or asymmetric stem cell division).

In a series of works [21]–[24], Berestycki, Roquejoffre and Rossi studied the field-road system with $p = 2$ and f a Fisher-KPP nonlinearity. They shed light on an *acceleration phenomenon*: when $D > 2d$, the road enhances the global diffusion and the spreading speed exceeds the standard Fisher-KPP invasion speed. This new feature has stimulated many works and, since then, many related problems taking into account heterogeneities, more complex geometries, nonlocal diffusions, etc. have been studied [17], [18], [83], [115]–[117], [138], [128], [60], [19], [20], [2], [147], [30].

Very recently, the *purely diffusive* field-road system — obtained by letting $f \equiv 0$ in (2.1) — has attracted some attention. Hence, an explicit expression for both the fundamental solution and the solution to the associated Cauchy problem, and a sharp (possibly up to a logarithmic term) decay rate of the L^∞ norm of the solution were obtained in [6]. In a bounded domain, the long time convergence was studied [4] through entropy methods, in both the continuous and the discrete (finite volume scheme) settings.

From now on, we thus consider the purely diffusive field-road model. By using the rescaling

$$\tilde{v}(t, x, y) = v\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right), \quad \tilde{u}(t, x) = \lambda u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda = \frac{\alpha}{\beta},$$

we see that it is enough to consider the case $\alpha = \beta$. Also, for $p \geq 2$, we work in the p -dimensional open finite cylinder

$$\Lambda := \mathbb{T}^{p-1} \times (0, 1),$$

where \mathbb{T} is the one-dimensional torus \mathbb{R}/\mathbb{Z} . For v , we impose the zero Neumann boundary conditions on the upper boundary $\mathbb{T}^{p-1} \times \{y = 1\}$. This insures the conservation of the total mass, namely $\int_{\mathbb{T}^{p-1} \times (0,1)} v(t, x, y) dx dy + \int_{\mathbb{T}^{p-1}} u(t, x) dx$, therefore modeling a purely

diffusive process within a closed environment. Denoting n the unit outward normal vector to $\partial\Lambda$, the considered system is thus

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \alpha u - \alpha v|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 0, \\ \partial_t u = D\Delta u + \alpha v|_{y=0} - \alpha u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

supplemented with an initial condition

$$\begin{cases} v|_{t=0} = v_0 \in L^\infty(\Lambda) \cap [0, 1]^\Lambda, & x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^{p-1}) \cap [0, 1]^{\mathbb{T}^{p-1}}, & x \in \mathbb{T}^{p-1}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Note that, given the linear nature of the system (2.2), the use of initial data bounded by 1 is a simplification that does not compromise the generality of our analysis. This choice is actually imposed by the exclusion rule, see Remark 2.3.

2.1.2 Interacting Particle Systems and Simple Exclusion Processes

The field of interacting particle systems is a branch of probability theory that emerged in the early 1970s, focusing on Markov processes inspired by models from statistical physics and biology. Analysis occurs at both the microscopic level of particle dynamics and by scaling from microscopic to macroscopic levels. This involves space and time renormalization procedures to derive hydrodynamic limits, represented by PDEs that describe key model quantities such as particle density.

Introduced by Frank Spitzer in [136], the exclusion process are interacting particle systems from which can be recovered a large variety of diffusive systems driven out of equilibrium, see the pioneering works [137], [102], [103]. We refer to the seminal book [93] for the complete derivation of the Heat equation on a torus from a nearest-neighbor exclusion process which consists in a collection of continuous-time random walks evolving on a lattice (see below for details).

When boundaries are considered, the system is in contact with some so-called reservoirs, see [97], [46]–[48] where Dirichlet boundary conditions are recovered. Recently, a lot of effort has been put in understanding the case of exclusion process whose dynamics is perturbed by the presence of a slow bond [29], [73], or by slow boundary effects [73]–[75], [15], [96], [98], [26].

Let us comment more precisely on some of the outcomes obtained in [15]. The authors specifically examine the hydrodynamic behavior of a symmetric simple exclusion process with *slow boundary*. This means that, at the boundary sites, particles can be born or die at slower rates (depending on the scaling parameter N) than events occurring in the bulk. The hydrodynamic limit is then the Heat equation, supplemented with Dirichlet, Robin, or Neumann boundary conditions, depending on the scaling of the boundary rates.

The present work stands at the crossroads of this framework, the reaction-diffusion issues and epidemiology/population dynamics modeling. With that respect, let us mention the very recent work [111] where a reaction-diffusion system modeling the sterile insect technique is retrieved. The very originality of our work stands in the fact that the considered system is posed on sets of different dimensions a case which, as far as we know, is considered for the first time in the interacting particle system literature.

2.2 Notations and main result

All the notations used in this paper are gathered in the Table of Notations at the end of this document.

2.2.1 Sets and related notations

As announced above, in the macroscopic setting, we work in the p -dimensional open finite cylinder

$$\Lambda := \mathbb{T}^{p-1} \times (0, 1),$$

where \mathbb{T} designates the one-dimensional torus \mathbb{R}/\mathbb{Z} . The boundary of the domain is denoted

$$\Gamma := \partial\Lambda = \{(x, y) \in \bar{\Lambda} \mid y = 0 \text{ or } y = 1\} = \mathbb{T}^{p-1} \times \{0, 1\},$$

with $\bar{\Lambda}$ the closure of Λ . We partition Γ into two parts representing the lower and upper boundaries of the cylinder:

$$\Gamma^{\text{low}} := \mathbb{T}^{p-1} \times \{0\} \quad \text{and} \quad \Gamma^{\text{up}} := \mathbb{T}^{p-1} \times \{1\}.$$

At the microscopic level, given an integer $N \geq 2$, we define Λ_N and Γ_N as the corresponding discrete microscopic sets. Specifically, by letting $\mathbb{T}_N := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ the discrete one-dimensional torus of length N ,

$$\Lambda_N := \mathbb{T}_N^{p-1} \times \llbracket 1; N-1 \rrbracket$$

represents the cylinder in \mathbb{Z}^p of height $N-1$ and basis \mathbb{T}_N^{p-1} , its boundary being

$$\Gamma_N := \{(i, j) \in \Lambda_N \mid j = 1 \text{ or } N-1\} = \mathbb{T}_N^{p-1} \times \{1, N-1\}.$$

Similarly, $\Gamma_N = \Gamma_N^{\text{low}} \cup \Gamma_N^{\text{up}}$ with

$$\Gamma_N^{\text{low}} := \mathbb{T}_N^{p-1} \times \{1\} \quad \text{and} \quad \Gamma_N^{\text{up}} := \mathbb{T}_N^{p-1} \times \{N-1\}.$$

The elements of $\bar{\Lambda}$ are represented by

$$\hat{x} = (x, y) \quad \text{and} \quad \hat{z} = (z, \omega),$$

with $x, z \in \mathbb{T}^{p-1}$ and $y, \omega \in (0, 1)$, while those of Λ_N are symbolized by the letters

$$\hat{i} = (i, j) \quad \text{and} \quad \hat{k} = (k, \ell),$$

with $i, k \in \mathbb{T}_N^{p-1}$ and $j, \ell \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$.

2.2.2 Description of the microscopic model

We consider the evolution of two kinds of interacting particles on the lattices Λ_N (the microscopic field) and Γ_N^{low} (the microscopic road). The associated stochastic dynamics is described by the temporal evolution of a Markov process denoted by $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$, where $T > 0$ is a given temporal horizon. Particles tied to the dynamics of η (the “field-particles”) evolve in the whole microscopic field Λ_N , while the particles corresponding to the dynamics of ξ (the “road-particles”) evolve solely on the microscopic road Γ_N^{low} , that stands as the lower frontier of the microscopic field¹. Both types of particles follow an exclusion rule in its respective environment: each site $\hat{i} = (i, j) \in \Lambda_N$ can host at most one field-particle, and similarly, each site $i \in \Gamma_N^{\text{low}}$ can host at most one road-particle. Note in particular that at a site $i \in \Gamma_N^{\text{low}}$, there may be a field-particle *and* a road-particle.

The overall dynamics emerge from the superposition of several independent ones, which are individually specified below and collectively depicted in Figure 42:

- *Diffusion in the field.* Within Λ_N , the field-particles follow a simple exclusion process and jump at exponential times. The dynamics of this process is as follows: a particle located at site \hat{i} awaits an exponential time after which it jumps to a neighboring site \hat{k} with speeded rate N^2d , for some fixed $d > 0$. However, if the site \hat{k} is already occupied, the jump is prevented in accordance with the exclusion rule.

- *Diffusion on the road.* Similarly, the road-particles follow a simple exclusion process on \mathbb{T}_N^{p-1} : a particle positioned at site i awaits an exponential time after which it jumps to a neighboring site k with speeded rate N^2D , for some fixed $D > 0$. However, if the site k is already occupied, the jump is inhibited.

- *Reservoir at the upper field’s boundary.* The dynamics defined on the upper boundary Γ_N^{up} act as reservoirs for the field-particles that are much slower compared to the rate of jumps in the bulk. Fix a constant $0 \leq b \leq 1$, for each site $\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}$, the following events occur, according to exponential times that are independent of all others:

- In the absence of a particle, a new one is generated with rate b .
- Conversely, if a particle is present, it is eliminated with rate $1 - b$.

- *Exchange dynamics between the lower field’s boundary and the road.* We now describe the interacting behavior between the road-particles and the field-particles at the lower

¹It is important to note that the microscopic road Γ_N^{low} is actually embedded in \mathbb{Z}^{p-1} . For the purpose of simplifying notations and facilitating understanding, we often make an identification between $(i, 1)$ and i , establishing a one-to-one correspondence between the lower boundary of the microscopic field and the $(p - 1)$ -dimensional torus. In line with this simplification, we will use $\xi(i)$ and $\eta(i)$ to denote what are, in fact, $\xi(i, 1)$ and $\eta(i, 1)$. This is a deliberate choice to streamline the expressions without compromising the accuracy of the mathematical representations involved. Similarly, on the upper microscopic boundary Γ_N^{up} , we may write $\eta(i)$ to represent $\eta(i, N - 1)$, provided this does not lead to any ambiguity.

2.2. Notations and main result

boundary of the microscopic field Γ_N^{low} . Fix $\alpha > 0$, for each site $\hat{i} = (i, 1) \in \Gamma_N^{\text{low}}$, according to exponential times, the following scenarios may occur:

- If a road-particle is present and no field-particle exists, then a field-particle is generated at site \hat{i} with speeded rate $N\alpha$ (\heartsuit). Independently, the road-particle is eliminated with rate α (\clubsuit).
- Conversely, if a field-particle is present without a road-particle, then the field-particle is eliminated with speeded rate $N\alpha$ (\diamond). Independently, a road-particle is generated with rate α (\spadesuit).

The configuration space is given by

$$S_N := \underbrace{\{0, 1\}^{\Lambda_N}}_{=: S_N^{\text{field}}} \times \underbrace{\{0, 1\}^{\Gamma_N^{\text{low}}}}_{=: S_N^{\text{road}}}$$

which we endow with the product topology. The elements of S_N , referred to as configurations, are denoted by (η, ξ) . The first marginal η represents a configuration within the state space S_N^{field} . To be more specific, in a given configuration η , for any \hat{i} in Λ_N , $\eta(\hat{i}) = 1$ means the site \hat{i} is occupied. Conversely, $\eta(\hat{i}) = 0$ signifies that the site \hat{i} is empty. Similarly, the second marginal ξ stands for a configuration within the state space S_N^{road} , and for any i in Γ_N^{low} , the value $\xi(i)$ indicates the occupancy status of particle at site i in a given configuration ξ .

For any configuration η in S_N^{field} (resp. ξ in S_N^{road}), and any sites \hat{i}, \hat{k} in Λ_N (resp. i, k in Γ_N^{low}), let $\eta^{\hat{i}, \hat{k}}$ (resp. $\xi^{i, k}$) be the configuration obtained from η (resp. ξ) by switching the values at \hat{i} and \hat{k} (resp. i and k), namely

$$(\eta^{\hat{i}, \hat{k}})(\hat{m}) = \begin{cases} \eta(\hat{i}) & \text{if } \hat{m} = \hat{k}, \\ \eta(\hat{k}) & \text{if } \hat{m} = \hat{i}, \\ \eta(\hat{m}) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \left(\text{resp. } (\xi^{i, k})(m) = \begin{cases} \xi(i) & \text{if } m = k, \\ \xi(k) & \text{if } m = i, \\ \xi(m) & \text{otherwise} \end{cases} \right).$$

For the sites $\hat{i} \in \Gamma_N$ (resp. $i \in \Gamma_N^{\text{low}}$), let $\eta^{\hat{i}}$ (resp. ξ^i) be the configuration obtained from η (resp. ξ) by flipping the occupation number at site \hat{i} (resp. i), namely

$$(\eta^{\hat{i}})(\hat{m}) = \begin{cases} 1 - \eta(\hat{m}) & \text{if } \hat{m} = \hat{i}, \\ \eta(\hat{m}) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \left(\text{resp. } (\xi^i)(m) = \begin{cases} 1 - \xi(m) & \text{if } (m) = i, \\ \xi(m) & \text{otherwise} \end{cases} \right).$$

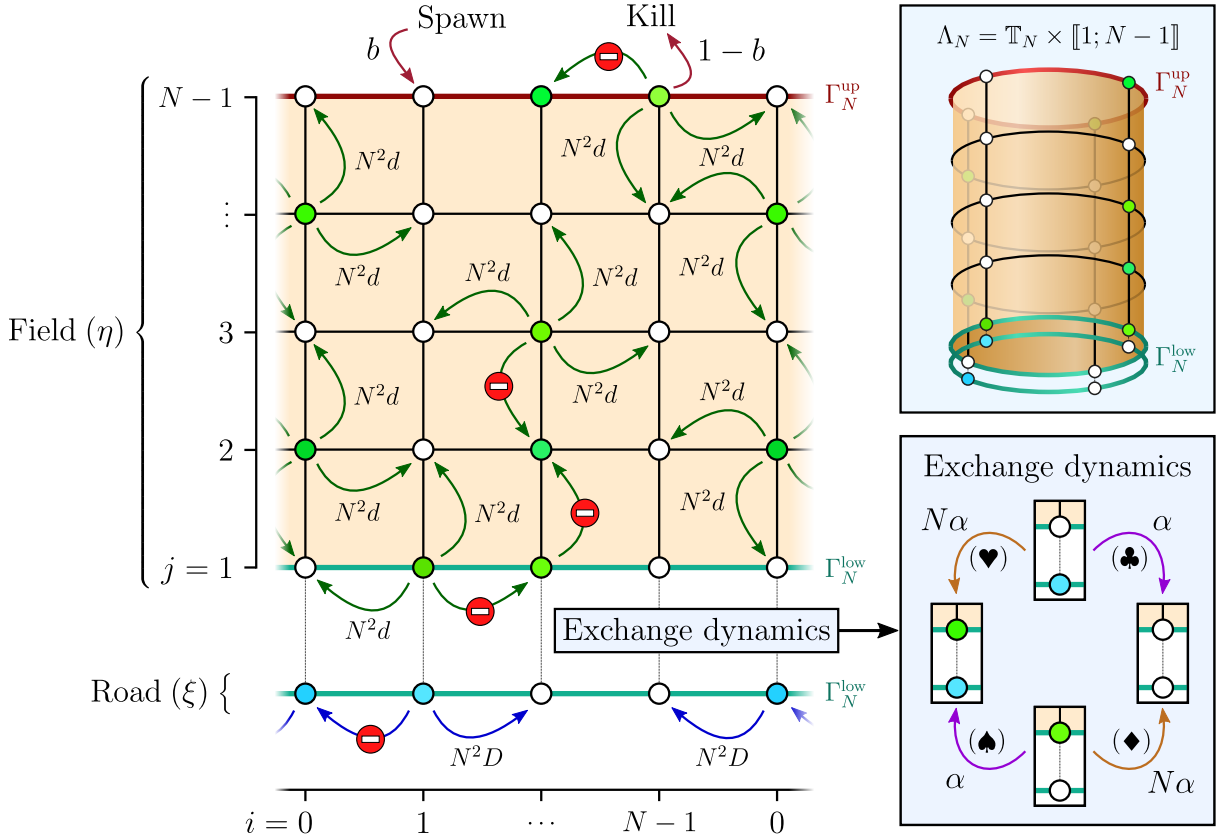


Figure 42 — **The microscopic dynamics in dimension $p = 2$.** In the field, particles are represented by green dots \bullet and jump towards one of their adjacent sites at exponential times with mean frequency $N^2 d$ — “with rate $N^2 d$ ” for short. Moves to already occupied sites are prohibited by the exclusion rule, and are indicated by the symbol \ominus . Similarly, particles on the road are depicted by the blue dots \bullet and jump to their neighboring unoccupied sites with rate $N^2 D$. At the upper boundary of the field Γ_N^{up} , particle emerge in empty sites with rate b and are removed with rate $1 - b$. The interactions at the lower boundary of the field Γ_N^{low} allow the coupling between the field and the road and play a central role in the model. These are detailed in the “Exchange dynamics” panel on the right-hand-side of the figure. For clarity and to facilitate understanding, Γ_N^{low} is represented twice to distinguish between the particles at the lower boundary of the field and those on the road. Notice also that not all possible jumps are represented.

Fix $\alpha, d, D \in (0, \infty)$, and $0 \leq b \leq 1$. The generator of the microscopic dynamics, $\mathcal{L}_N : \mathbb{R}^{S_N} \rightarrow \mathbb{R}^{S_N}$, is split as follows:

$$\mathcal{L}_N = \underbrace{N^2 \mathbb{L}_N^{\text{field}}}_{\text{field diffusion}} + \overbrace{N^2 \mathbb{L}_N^{\text{road}}}^{\text{road diffusion}} + \underbrace{N L_N^{\text{Rob}}}_{\text{lower Robin condition}} + \overbrace{L_N^{\text{reac}}}_{\text{road reaction}} + \underbrace{L_N^{\text{up}}}_{\text{upper reservoir}}, \quad (2.4)$$

2.2. Notations and main result

where, for any $f : S_N \rightarrow \mathbb{R}$ and any $(\eta, \xi) \in S_N$,

$$\left(\mathbb{L}_N^{\text{field}} f\right)(\eta, \xi) = \frac{d}{2} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \left[f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi) - f(\eta, \xi) \right], \quad (2.5)$$

$$\left(\mathbb{L}_N^{\text{road}} f\right)(\eta, \xi) = \frac{D}{2} \sum_{\substack{i, k \in \Gamma_N^{\text{low}} \\ |i - k| = 1}} \left[f(\eta, \xi^{i, k}) - f(\eta, \xi) \right], \quad (2.6)$$

$$\left(L_N^{\text{Rob}} f\right)(\eta, \xi) = \alpha \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \left(\eta(i) - \xi(i) \right)^2 \left[f(\eta^i, \xi) - f(\eta, \xi) \right], \quad (2.7)$$

$$\left(L_N^{\text{reac}} f\right)(\eta, \xi) = \alpha \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \left(\eta(i) - \xi(i) \right)^2 \left[f(\eta, \xi^i) - f(\eta, \xi) \right], \quad (2.8)$$

$$\left(L_N^{\text{up}} f\right)(\eta, \xi) = \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \left(b(1 - \eta(i)) + (1 - b)\eta(i) \right) \left[f(\eta^i, \xi) - f(\eta, \xi) \right]. \quad (2.9)$$

In (2.5) and (2.6), we use $|\cdot|$ to denote the infinity norm in \mathbb{R}^p , that is

$$|\hat{i}| = \max(|i_1|, \dots, |i_{p-1}|, |j|), \quad \forall \hat{i} \in \Lambda_N.$$

Also, we highlight that the flip rate $\alpha(\eta(i) - \xi(i))^2$ in (2.7) and (2.8) arises from equality

$$(1 - \eta(i))\xi(i) + \eta(i)(1 - \xi(i)) = (\eta(i) - \xi(i))^2,$$

which holds since both $\eta(i)$ and $\xi(i)$ belong to $\{0, 1\}$.

The parts (2.5), (2.6) and (2.9) are rather classical, see [93], [15], [111] for instance. On the other hand, the parts (2.7) and (2.8) are original, their role being to catch the exchange condition in the field-road model. We refer to [74] and [76] for related issues.

For a given time horizon $T > 0$, we denote $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$ the Markov process with state space S_N associated to the generator \mathcal{L}_N . We define $D([0, T]; S_N)$ as the path space for càdlàg time trajectories valued in S_N . Given a measure μ_N on S_N , we denote by $\mathbb{P}_N^{\mu_N}$ the probability measure on $D([0, T]; S_N)$ induced by μ_N and $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$, and we write $\mathbb{E}_N^{\mu_N}$ the expectation with respect to $\mathbb{P}_N^{\mu_N}$. Moreover, the notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu_N}$ refers to the scalar product on $L_{\mu_N}^2(S_N)$.

2.2.3 Functional spaces and macroscopic equations

For any integers n and m , we define the functional spaces

$$\mathcal{C}^{n, m}([0, T] \times \bar{\Lambda}) \quad \text{and} \quad \mathcal{C}^{n, m}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$$

which respectively consist of functions

$$G = G(t, \hat{x}) : [0, T] \times \bar{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{and} \quad H = H(t, x) : [0, T] \times \mathbb{T}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R},$$

that possess n continuous derivatives with respect to the time variable on $[0, T]$, and m continuous derivatives with respect to the spatial variable on $\bar{\Lambda}$ and \mathbb{T}^{p-1} respectively. We also introduce the subset $\mathcal{C}_c^{n,m}([0, T] \times \bar{\Lambda})$ of functions with compact support in $[0, T] \times \Lambda$ within $\mathcal{C}^{n,m}([0, T] \times \bar{\Lambda})$. Similarly, we denote $\mathcal{C}^m(\bar{\Lambda})$ and $\mathcal{C}^m(\mathbb{T}^{p-1})$ the sets of functions with m continuous derivatives on $\bar{\Lambda}$ and \mathbb{T}^{p-1} respectively.

In the whole document, if φ is a function that depends both on the time and the spatial variables, the abbreviation $\varphi(t)$ obviously stands for $\varphi(t, \cdot)$.

In the sequel, the notations $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}}$ respectively represent the $L^2(\Lambda)$ and $L^2(\mathbb{T}^{p-1})$ inner products.

We consider the Sobolev space $\mathcal{H}^1(\Lambda)$ as the set of functions g in $L^2(\Lambda)$ such that for every q ranging from 1 to p , there is an element $\partial_{e_q} g$ in $L^2(\Lambda)$, for which we have

$$\langle \partial_{e_q} G, g \rangle_\Lambda = -\langle G, \partial_{e_q} g \rangle_\Lambda, \quad \forall G \in \mathcal{C}_c^\infty(\Lambda),$$

where $\partial_{e_q} \varphi$ denotes the derivative with respect to the q^{th} canonical vector of \mathbb{R}^p . We then define the norms on the Sobolev space $\mathcal{H}^1(\Lambda)$ by

$$\|g\|_{\mathcal{H}^1(\Lambda)} = \left(\|g\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \sum_{q=1}^p \|\partial_{e_q} g\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right)^{1/2}.$$

With respect to a given Banach space B (most of the time, $B = \mathcal{H}^1(\Lambda)$ or $B = L^2(\mathbb{T}^{p-1})$), we define $L^2(0, T; B)$ as the function space composed of maps $\varphi : [0, T] \rightarrow B$ satisfying

$$\int_0^T \|\varphi(t)\|_B^2 dt < +\infty.$$

In order to define the value of an element g in $\mathcal{H}^1(\Lambda)$ at the boundaries $\Gamma = \Gamma^{\text{up}} \cup \Gamma^{\text{low}}$, we need to introduce the notion of trace. The trace operator on the space $\mathcal{H}^1(\Lambda)$ can be defined as the bounded linear operator

$$\text{Tr} : \mathcal{H}^1(\Lambda) \rightarrow L^2(\Gamma)$$

such that Tr extends the classical trace, that is

$$\text{Tr}(g) = g|_\Gamma, \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Lambda) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Lambda}).$$

We refer to [65, Part II, Section 5] for a detailed survey of the trace operator. In the sequel, for any point $\hat{x} = (x, y)$ in Γ and any function g belonging to the space $L^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Lambda))$, all the expressions $g(t, \hat{x})$, $g(t, x)$ or $g(t, \cdot)|_\Gamma(x)$ represent the trace operator applied to $g(t, \cdot)$ at position $\hat{x} \in \Gamma$. Additionally, observe that $\partial_y g(t, \cdot)$ (resp. $-\partial_y g(t, \cdot)$) stands for the normal derivative of the function $g(t, \cdot)$ on the boundary Γ^{up} (resp. Γ^{low}).

We are now in a position to introduce our notion of weak solution for the field-road problem (2.2)-(2.3).

Definition 2.1 (Solving the field-road system) *Fix a time horizon $T > 0$. For any measurable initial data $v_0 : \Lambda \rightarrow [0, 1]$ and $u_0 : \mathbb{T}^{p-1} \rightarrow [0, 1]$, a couple of functions (v, u) is said to be a weak solution to the initial value problem (2.2)-(2.3) as soon as the following two conditions (W1)-(W2) hold true:*

(W1) $v \in L^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Lambda))$ and $u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^{p-1}))$.

(W2) For any $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$, any $H \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$, any $t \in [0, T]$, there holds

$$\begin{aligned} \langle v(t), G(t) \rangle_{\Lambda} - \langle v_0, G(0) \rangle_{\Lambda} &= \int_0^t \langle v(s), \partial_s G(s) \rangle_{\Lambda} ds + \int_0^t \langle v(s), d\Delta G(s) \rangle_{\Lambda} ds \\ &\quad - \int_0^t \langle v|_{y=1}(s), d\partial_y G|_{y=1}(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds + \int_0^t \langle v|_{y=0}(s), d\partial_y G|_{y=0}(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha \langle u(s) - v|_{y=0}(s), G|_{y=0}(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds, \end{aligned} \tag{2.10}$$

together with

$$\begin{aligned} \langle u(t), H(t) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \langle u_0, H(0) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} &= \int_0^t \langle u(s), \partial_s H(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds + \int_0^t \langle u(s), D\Delta_x H(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha \langle v|_{y=0}(s) - u(s), H(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds. \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2.4 Main Results

We use the notations $\mathcal{M}^{\text{field}}$ and $\mathcal{M}^{\text{road}}$ to denote the sets of positive measures on Λ and Γ^{low} whose total mass is bounded by 1, and we define the space \mathcal{M} as the Cartesian product $\mathcal{M}^{\text{field}} \times \mathcal{M}^{\text{road}}$. We denote the integrals of functions against measures indifferently for Λ or Γ^{low} , namely, for any measures $\mu \in \mathcal{M}^{\text{field}}$ and $\nu \in \mathcal{M}^{\text{road}}$, and any functions $G \in L^1_{\mu}(\Lambda)$ and $H \in L^1_{\nu}(\mathbb{T}^{p-1})$,

$$\langle \mu, G \rangle = \int_{\Lambda} G(\hat{x}) \mu(d\hat{x}) \quad \text{and} \quad \langle \mu, H \rangle = \int_{\mathbb{T}^{p-1}} H(x) \nu(dx).$$

We endow \mathcal{M} , $\mathcal{M}^{\text{field}}$ and $\mathcal{M}^{\text{road}}$ with a topology induced by the weak convergence of measures. It is worth mentioning that all these spaces are compact and Polish.

The empirical measure of a configuration $(\eta, \xi) \in S_N$ is defined as $\pi_N(\eta, \xi)$, where the

map $\pi_N : S_N \rightarrow \mathcal{M}$ is given by

$$\pi_N(\eta, \xi) := \left(\underbrace{\frac{1}{N^p} \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N} \eta(\hat{i}) \delta_{\hat{i}/N}}_{=: \pi_N^{\text{field}}(\eta)}, \underbrace{\frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \xi(i) \delta_{i/N}}_{=: \pi_N^{\text{road}}(\xi)} \right). \quad (2.12)$$

In (2.12), the notation $\delta_{\hat{i}/N}$ (resp. $\delta_{i/N}$) stands for the Dirac mass at place \hat{i}/N (resp. i/N). For any configuration $(\eta, \xi) \in S_N$, any $G \in \mathcal{C}^0(\bar{\Lambda})$ and any $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{p-1})$, we denote

$$\langle \pi_N(\eta, \xi), [G, H] \rangle := \langle \pi_N^{\text{field}}(\eta), G \rangle + \langle \pi_N^{\text{road}}(\xi), H \rangle.$$

We introduce $(\pi_N(t))_{t \in [0, T]} := (\pi_N(\eta_t, \xi_t))_{t \in [0, T]}$, the Markov process on the state space \mathcal{M} induced from $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$. The trajectories of this process occupy $D([0, T]; \mathcal{M})$, the designated path space for càdlàg time trajectories valued in \mathcal{M} . We endow $D([0, T]; \mathcal{M})$ with the Skorokhod topology. For further details regarding this topology, we refer the reader to [28], which provides an extensive survey on this subject. For $G \in \mathcal{C}^{0,0}([0, T] \times \bar{\Lambda})$, $H \in \mathcal{C}^{0,0}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$, and $t \in [0, T]$, we denote

$$\begin{aligned} \langle \pi_N(t), [G(t), H(t)] \rangle &:= \langle \pi_N^{\text{field}}(t), G(t) \rangle + \langle \pi_N^{\text{road}}(t), H(t) \rangle \\ &= \langle \pi_N^{\text{field}}(\eta_t), G(t) \rangle + \langle \pi_N^{\text{road}}(\xi_t), H(t) \rangle. \end{aligned}$$

Given an initial probability measure μ_N on S_N , we define, for $N \geq 2$, the probability measure $\mathbb{Q}_N^{\mu_N} := \mathbb{P}_N^{\mu_N}(\pi_N^{-1})$ on the set of measures \mathcal{M} , as the law of the Markov process

$$(\pi_N(t))_{t \in [0, T]} = (\pi_N(\eta_t, \xi_t))_{t \in [0, T]}.$$

Essentially, $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$ allows to provide a description through measures on the macroscopic space of the state distribution of the process when initiated from the measure μ_N .

Definition 2.2 (Sequence of measures associated with the initial data) *Let*

$$v_0 : \Lambda \rightarrow [0, 1] \quad \text{and} \quad u_0 : \mathbb{T}^{p-1} \rightarrow [0, 1]$$

be two measurable functions. We say that a sequence of probability measures

$$(\mu_N)_{N \geq 2} = (\mu_N^{\text{field}}, \mu_N^{\text{road}})_{N \geq 2}$$

on $S_N = S_N^{\text{field}} \times S_N^{\text{road}}$ is associated with (v_0, u_0) if

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^{\text{field}} \left[\eta \in S_N^{\text{field}} : \left| \langle \pi_N^{\text{field}}(\eta), G \rangle - \langle v_0, G \rangle_\Lambda \right| \geq \delta \right] = 0, \quad (2.13)$$

2.2. Notations and main result

and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^{\text{road}} \left[\xi \in S_N^{\text{road}} : \left| \langle \pi_N^{\text{road}}(\xi), H \rangle - \langle u_0, H \rangle_{\Gamma^{\text{low}}} \right| \geq \delta \right] = 0, \quad (2.14)$$

for any $\delta > 0$ and any $G \in \mathcal{C}^0(\bar{\Lambda})$ and $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^{p-1})$.

Remark 2.3 Observe in Definition 2.2 that we ask v_0 and u_0 to be valued in $[0, 1]$. This condition cannot be relaxed because of the exclusion rule, that enforces the sites to host at most one particle. To be convinced with this, consider the case $u_0 \equiv 2$, and take $H \equiv 1$. We then have $\langle u_0, H \rangle_{\Gamma^{\text{low}}} = 2$, and

$$\langle \pi_N^{\text{road}}(\xi), H \rangle = \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \xi(i) \leq \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} 1 = 1,$$

so that no configuration allows the limit (2.14) to hold, and the data $u_0 \equiv 2$ is unreachable.

Here is the main contribution of the present work.

Theorem 2.4 (Hydrodynamic limit) *Fix a time horizon $T > 0$. Let $v_0 : \Lambda \rightarrow [0, 1]$ and $u_0 : \mathbb{T}^{p-1} \rightarrow [0, 1]$ be two measurable functions, and $(\mu_N)_{N \geq 2}$ a sequence of initial probability measures on S_N associated with (v_0, u_0) in the sense of Definition 2.2. Then the sequence of probability measures $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ converges weakly towards some \mathbb{Q}_∞ which gives mass 1 to the path*

$$\left(\pi^{\text{field}}(t, dx dy), \pi^{\text{road}}(t, dx) \right)_{t \in [0, T]} = \left(v(t, x, y) dx dy, u(t, x) dx \right)_{t \in [0, T]},$$

where (v, u) is the unique weak solution to the Cauchy problem (2.2)-(2.3) in the sense of Definition 2.1. In particular, for any $t \in [0, T]$, any $\delta > 0$, and any test functions

$$G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda}) \quad \text{and} \quad H \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \Gamma^{\text{low}}),$$

we have

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N^{\mu_N} \left[\eta_t \in S_N^{\text{field}} : \left| \langle \pi_N^{\text{field}}(t), G(t) \rangle - \langle v(t), G(t) \rangle_\Lambda \right| > \delta \right] = 0,$$

and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}_N^{\mu_N} \left[\xi_t \in S_N^{\text{road}} : \left| \langle \pi_N^{\text{road}}(t), H(t) \rangle - \langle u(t), H(t) \rangle_{\Gamma^{\text{low}}} \right| > \delta \right] = 0.$$

2.2.5 The steps to prove Theorem 2.4 and organisation of the paper

The proof of the hydrodynamic limit, as outlined in Theorem 2.4, is inspired by works such as those by Kipnis and Landim [93] or Baldasso *et al.* [15], and unfolds in three

distinct steps. The first one is to prove the tightness of the probability measures $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ within the Skorokhod topology. This point, established in Section 2.3, is crucial to ensure the existence of accumulation points for this sequence. Following this, we characterize, in Section 2.4, the limit points \mathbb{Q}_∞ of the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$. Specifically, it is demonstrated that every \mathbb{Q}_∞ concentrates on measure processes with density relative to the Lebesgue measure at every moment (subsection 2.4.1), and that the corresponding densities satisfy conditions (W1)-(W2) (subsections 2.4.2 and 2.4.4) that characterize our notion of solution. This proves that the density of the measures loaded by \mathbb{Q}_∞ are weak solutions to the Cauchy problem (2.2)-(2.3). The third and final step, performed in Section 2.5, consists in showing — thanks to very adequate test functions — that the Cauchy problem (2.2)-(2.3) admits a unique solution.

2.3 Martingales and tightness

2.3.1 Martingales

We now proceed to explain the martingales associated to our system. Fix a couple of functions (G, H) with $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$ and $H \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \Gamma^{\text{low}})$, and consider the martingale $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_{N,G,H}$ with respect to the natural filtration $\sigma((\eta_s, \xi_s)_{0 \leq s \leq t})$ given for any $t \in [0, T]$ by the Dynkin's formula

$$\mathcal{M}_N(t) := \langle \pi_N(t), [G(t), H(t)] \rangle - \langle \pi_N(0), [G(0), H(0)] \rangle - \int_0^t (\partial_s + \mathcal{L}_N) (\langle \pi_N(s), [G(s), H(s)] \rangle) ds. \quad (2.15)$$

Expanding the empirical measure π_N with (2.12) in (2.15), we see that \mathcal{M}_N can be split into $\mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}} + \mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}$ where

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}}(t) &= \langle \pi_N^{\text{field}}(t), G(t) \rangle - \langle \pi_N^{\text{field}}(0), G(0) \rangle - \int_0^t [\partial_s + \mathcal{L}_N] [\langle \pi_N^{\text{field}}(s), G(s) \rangle] ds, \\ \mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}(t) &= \langle \pi_N^{\text{road}}(t), H(t) \rangle - \langle \pi_N^{\text{road}}(0), H(0) \rangle - \int_0^t [\partial_s + \mathcal{L}_N] [\langle \pi_N^{\text{road}}(s), H(s) \rangle] ds. \end{aligned} \quad (2.16)$$

The quadratic variation of \mathcal{M}_N is given by the martingale $\mathcal{N}_N = \mathcal{N}_{N,G,H}$ defined for any $t \in [0, T]$ as

$$\mathcal{N}_N(t) := [\mathcal{M}_N(t)]^2 - \int_0^t \mathcal{B}_N(s) ds, \quad (2.17)$$

where

$$\mathcal{B}_N(s) := \mathcal{L}_N [\langle \pi_N(s), [G(s), H(s)] \rangle^2] - 2 \langle \pi_N(s), [G(s), H(s)] \rangle \times \mathcal{L}_N [\langle \pi_N(s), [G(s), H(s)] \rangle]. \quad (2.18)$$

A proof that \mathcal{M}_N and \mathcal{N}_N are martingales with respect to the natural filtration is classical and follows the very same lines as [93, Appendix 1, Section 5].

In the integral terms of $\mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}}$ and $\mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}$ in (2.16) we expand the expressions of π_N^{field} , π_N^{road} (2.12), and \mathcal{L}_N (2.4), and use at some point two discrete summations by parts. After

2.3. Martingales and tightness

some tedious but straightforward computations — using moves such as $(\eta(i) - \xi(i))^2(1 - 2\eta(i)) = \xi(i) - \eta(i)$ or $(b(1 - \eta(i)) + (1 - b)\eta(i))(1 - 2\eta(i)) = b - \eta(i)$ — we reach

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}}(t) &= \langle \pi_N^{\text{field}}(t), G(t) \rangle - \langle \pi_N^{\text{field}}(0), G(0) \rangle - \int_0^t \langle \pi_N^{\text{field}}(s), \partial_s G(s) \rangle ds \\ &\quad - \frac{1}{N^p} \int_0^t \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N} d\Delta_x^N G(s, \frac{\hat{i}}{N}) \times \eta_s(\hat{i}) ds - \frac{1}{N^p} \int_0^t \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N \setminus \Gamma_N} d\partial_{yy}^N G(s, \frac{\hat{i}}{N}) \times \eta_s(\hat{i}) ds \\ &\quad + \frac{1}{N^{p-1}} \int_0^t \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} d\partial_y^N G(s, \frac{i}{N}) \times \eta_s(i) ds - \frac{1}{N^{p-1}} \int_0^t \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} d\partial_y^N G(s, \frac{i}{N}) \times \eta_s(i) ds \\ &\quad - \frac{\alpha}{N^{p-1}} \int_0^t \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} G(s, \frac{i}{N}) \times (\xi_s(i) - \eta_s(i)) ds - \frac{1}{N^p} \int_0^t \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{i}{N}) \times (b - \eta_s(i)) ds, \end{aligned} \quad (2.19)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}(t) &= \langle \pi_N^{\text{road}}(t), H(t) \rangle - \langle \pi_N^{\text{road}}(0), H(0) \rangle - \int_0^t \langle \pi_N^{\text{road}}(s), \partial_s H(s) \rangle ds \\ &\quad - \frac{1}{N^{p-1}} \int_0^t \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} D\Delta_x^N H(s, \frac{i}{N}) \times \xi_s(i) ds - \frac{\alpha}{N^{p-1}} \int_0^t \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} H(s, \frac{i}{N}) \times (\eta_s(i) - \xi_s(i)) ds. \end{aligned} \quad (2.20)$$

In (2.19) and (2.20), the discrete Laplacians Δ_x^N and ∂_{yy}^N are defined by (time dependency is locally drop for the sake of clarity)

$$\begin{aligned} \Delta_x^N H(\frac{i}{N}) &:= N^2 \sum_{q=1}^{p-1} \left[H(\frac{i+e_q}{N}) - 2H(\frac{i}{N}) + H(\frac{i-e_q}{N}) \right], & \forall i \in \mathbb{T}_N^{p-1}, \\ \Delta_x^N G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) &:= N^2 \sum_{q=1}^{p-1} \left[G(\frac{i+e_q}{N}, \frac{j}{N}) - 2G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) + G(\frac{i-e_q}{N}, \frac{j}{N}) \right], & \forall (i, j) \in \Lambda_N, \\ \partial_{yy}^N G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) &:= N^2 \left[G(\frac{i}{N}, \frac{j+1}{N}) - 2G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) + G(\frac{i}{N}, \frac{j-1}{N}) \right], & \forall (i, j) \in \Lambda_N \setminus \Gamma_N, \end{aligned} \quad (2.21)$$

and the discrete derivative ∂_y^N at the boundary of the microscopic field by (time dependency is locally drop for the sake of clarity)

$$\partial_y^N G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) := \begin{cases} N \left[G(\frac{i}{N}, \frac{j+1}{N}) - G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) \right] & \text{if } j = 1, \\ N \left[G(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) - G(\frac{i}{N}, \frac{j-1}{N}) \right] & \text{if } j = N - 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Similarly, we also develop \mathcal{B}_N from (2.18) with the expression of \mathcal{L}_N in (2.4). The computations show that \mathcal{B}_N can be split into $\mathcal{B}_{N,G}^{\text{field}} + \mathcal{B}_{N,H}^{\text{road}}$ with

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{N,G}^{\text{field}}(s) &= \frac{d/2}{N^{2p}} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \left[\eta_s(\hat{i}) - \eta_s(\hat{k}) \right]^2 \times \left[N(G(s, \frac{\hat{i}}{N}) - G(s, \frac{\hat{k}}{N})) \right]^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{N^{2p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \left[\eta_s(i) - \xi_s(i) \right]^2 \times \left[G(s, \frac{i}{N}) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{N^{2p}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \left[b(1 - \eta_s(i)) + (1 - b)\eta_s(i) \right] \times \left[G(s, \frac{i}{N}) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{N,H}^{\text{road}}(s) &= \frac{D/2}{N^{2(p-1)}} \sum_{\substack{i,k \in \Gamma_N^{\text{low}} \\ |i-k|=1}} \left[\xi_s(i) - \xi_s(k) \right]^2 \times \left[N(H(s, \frac{i}{N}) - H(s, \frac{k}{N})) \right]^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{N^{2(p-1)}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \left[\eta_s(i) - \xi_s(i) \right]^2 \times \left[H(s, \frac{i}{N}) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3.2 Tightness

We are now in position to prove the tightness of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$.

Proposition 2.5 (Tightness) *For any sequence of initial measures $(\mu_N)_{N \geq 2}$ on S_N , the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ is tight in the Skorokhod topology of $D([0, T]; \mathcal{M})$.*

Proof of Proposition 2.5. In accordance with the method presented in [93, Chapter 4, Section 1], we must verify the following two statements for any $G \in \mathcal{C}^2(\bar{\Lambda})$ and any $H \in \mathcal{C}^2(\Gamma^{\text{low}})$:

(T1) For all $t \in [0, T]$ and all $\varepsilon > 0$, there is $M > 0$ such that

$$\sup_{N \geq 2} \left\{ \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\left| \langle \pi_N(t), [G, H] \rangle \right| \geq M \right) \right\} \leq \varepsilon. \quad (2.25)$$

(T2) For all $\varepsilon > 0$, we have

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [\delta, T-\delta]} \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\left| \langle \pi_N(t+\theta), [G, H] \rangle - \langle \pi_N(t), [G, H] \rangle \right| \geq \varepsilon \right) \right\} = 0. \quad (2.26)$$

Note that, within this proof, we require the test functions G and H to depend solely on the spatial variable.

• *Proof of (T1).* Since the empirical measures π_N^{field} and π_N^{road} are both bounded by 1, we almost surely have

$$\left| \langle \pi_N^{\text{field}}(t), G \rangle \right| \leq \|G\|_{L^\infty(\Lambda)} \quad \text{and} \quad \left| \langle \pi_N^{\text{road}}(t), H \rangle \right| \leq \|H\|_{L^\infty(\Gamma^{\text{low}})}.$$

As a result, (2.25) is achieved with $M = \varepsilon / (\|G\|_{L^\infty(\Lambda)} + \|H\|_{L^\infty(\Gamma^{\text{low}})})$.

• *Proof of (T2).* By expanding the terms $\langle \pi_N(t+\theta), [G, H] \rangle$ and $\langle \pi_N(t), [G, H] \rangle$ with those

2.3. Martingales and tightness

of the Dynkin's formula in (2.15) and using the Markov and the triangular inequalities, we can see that (2.26) holds if we prove the following limits:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [\delta, T-\delta]} \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \mathcal{M}_N(t+\theta) - \mathcal{M}_N(t) \right| \right) \right\} = 0, \quad (2.27)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [\delta, T-\delta]} \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \int_t^{t+\theta} \mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{field}}(s), G \rangle \right] ds \right| \right) \right\} = 0, \quad (2.28)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [\delta, T-\delta]} \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \int_t^{t+\theta} \mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{road}}(s), H \rangle \right] ds \right| \right) \right\} = 0. \quad (2.29)$$

We start to show (2.27). Focusing on the terms between the brackets, the Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \mathcal{M}_N(t+\theta) - \mathcal{M}_N(t) \right| \right) &\leq \sqrt{\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left[\mathcal{M}_N(t+\theta) - \mathcal{M}_N(t) \right]^2 \right)} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left[\mathcal{M}_N(t+\theta) \right]^2 \right) - \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left[\mathcal{M}_N(t) \right]^2 \right)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

where the second line arises from the martingale property. We use then the fact that the quadratic variation \mathcal{N}_N defined in (2.17) is a zero-mean martingale to simplify (2.30) into

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \mathcal{M}_N(t+\theta) - \mathcal{M}_N(t) \right| \right) \leq \sqrt{\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\int_t^{t+\theta} |\mathcal{B}_N(s)| ds \right)}. \quad (2.31)$$

Now observe from (2.23) and (2.24) that, for any $s \in (t-\delta, t+\delta)$,

$$|\mathcal{B}_{N,G}^{\text{field}}(s)| \leq \frac{d/2}{N^{2p}} \|\nabla G\|_{L^\infty(\Lambda)}^2 \left(\sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} 1 \right) + \frac{\alpha}{N^{2p-1}} \|G\|_{L^\infty(\Lambda)}^2 \left(\sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} 1 \right) + \frac{1}{N^{2p}} \|G\|_{L^\infty(\Lambda)}^2 \left(\sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} 1 \right)$$

and

$$|\mathcal{B}_{N,H}^{\text{road}}(s)| \leq \frac{D/2}{N^{2(p-1)}} \|\nabla_x H\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{p-1})}^2 \left(\sum_{\substack{i, k \in \Gamma_N^{\text{low}} \\ |i-k|=1}} 1 \right) + \frac{\alpha}{N^{2(p-1)}} \|H\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{p-1})}^2 \left(\sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} 1 \right).$$

As a result, we have $|\mathcal{B}_{N,G}^{\text{field}}(s)| = O(1/N^p)$ and $|\mathcal{B}_{N,H}^{\text{road}}(s)| = O(1/N^{p-1})$, and then $|\mathcal{B}_N(s)| = O(1/N^{p-1})$. Combining this control with (2.31), the proof of the limit (2.27) is then completed.

We move now on the proofs of (2.28) and (2.29). By similar computations as those used to develop $\mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}}$ and $\mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}$ in (2.19) and (2.20), we express the terms under the integrals in (2.28) and (2.29):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{field}}(s), G \rangle \right] &= \frac{1}{N^p} \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N} d\Delta_x^N G \left(\frac{\hat{i}}{N} \right) \times \eta_s(\hat{i}) + \frac{1}{N^p} \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N \setminus \Gamma_N} d\partial_{yy}^N G \left(\frac{\hat{i}}{N} \right) \times \eta_s(\hat{i}) \\ &\quad - \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} d\partial_y^N G \left(\frac{i}{N} \right) \times \eta_s(i) + \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} d\partial_y^N G \left(\frac{i}{N} \right) \times \eta_s(i) \\ &\quad + \frac{\alpha}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} G \left(\frac{i}{N} \right) \times (\xi_s(i) - \eta_s(i)) + \frac{1}{N^p} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} G \left(\frac{i}{N} \right) \times (b - \eta_s(i)) \end{aligned} \quad (2.32)$$

and

$$\mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{road}}(s), H \rangle \right] = \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} D \Delta_x^N H \left(\frac{i}{N} \right) \times \xi_s(i) + \frac{\alpha}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} H \left(\frac{i}{N} \right) \times (\eta_s(i) - \xi_s(i)), \quad (2.33)$$

where we recall that the discrete operators Δ_x^N , ∂_{yy}^N , and ∂_y^N are defined in (2.21) and (2.22). Using then some Taylor expansions to control the discrete derivatives in (2.32) and (2.33), we reach

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{field}}(s), G \rangle \right]| &\leq \frac{d}{N^p} \left(\sup_{\Lambda} |\Delta_x G| + O(1/N) \right) \binom{\sum 1}{\hat{i} \in \Lambda_N} + \frac{d}{N^p} \left(\sup_{\Lambda} |\partial_{yy} G| + O(1/N) \right) \binom{\sum 1}{\hat{i} \in \Lambda_N \setminus \Gamma_N} \\ &+ \frac{d}{N^{p-1}} \left(\sup_{\Gamma^{\text{up}}} |\partial_y G| + O(1/N) \right) \binom{\sum 1}{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} + \frac{d}{N^{p-1}} \left(\sup_{\Gamma^{\text{low}}} |\partial_y G| + O(1/N) \right) \binom{\sum 1}{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \\ &+ \frac{\alpha}{N^{p-1}} \left(\sup_{\Gamma^{\text{low}}} |G| \right) \binom{\sum 1}{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} + \left(\sup_{\Gamma^{\text{up}}} |G| \right) \binom{\sum 1}{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \end{aligned}$$

and

$$|\mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{road}}(s), H \rangle \right]| \leq \frac{D}{N^{p-1}} \left(\sup_{\mathbb{T}^{p-1}} |\Delta_x H| + O(1/N) \right) \binom{\sum 1}{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} + \frac{\alpha}{N^{p-1}} \left(\sup_{\mathbb{T}^{p-1}} |H| \right) \binom{\sum 1}{i \in \Gamma_N^{\text{low}}}.$$

From this, it follows that $|\mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{field}}(s), G \rangle \right]|$ and $|\mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{road}}(s), H \rangle \right]|$ remain bounded. Therefore, for some constant $C > 0$, we have

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \int_t^{t+\theta} \mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{field}}(s), G \rangle \right] ds \right| \right) \leq C\delta$$

and

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\left| \int_t^{t+\theta} \mathcal{L}_N \left[\langle \pi_N^{\text{road}}(s), H \rangle \right] ds \right| \right) \leq C\delta,$$

whom the limits (2.28) and (2.29) are the straight consequence.

Having verified both conditions (T1) and (T2), we can conclude that the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ is tight with respect to the Skorokhod topology on $D([0, T]; \mathcal{M})$. This completes the proof. \square

2.4 Characterization of the limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$

2.4.1 The limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ load paths with density

Proposition 2.6 (Loading Lebesgue continuous measure processes) *Any limit point of the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$, referred to as \mathbb{Q}_∞ , is concentrated on the set $D^0([0, T]; \mathcal{M})$ of couple of measure processes that are, at any time, absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on Λ and \mathbb{T}^{p-1} respectively. More precisely, for any \mathbb{Q}_∞ in the closure of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$, we have*

$$\mathbb{Q}_\infty \left(D^0([0, T]; \mathcal{M}) \right) = 1,$$

2.4. Characterization of the limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$

where

$$D^0([0, T]; \mathcal{M}) := \left\{ \left(\pi^{\text{field}}(t), \pi^{\text{road}}(t) \right)_{t \in [0, T]} \in D([0, T]; \mathcal{M}) \text{ such that,} \right. \\ \left. \text{for any } t \in [0, T], \left(\pi^{\text{field}}(t), \pi^{\text{road}}(t) \right) \text{ is absolutely} \right. \\ \left. \text{continuous with respect to the Lebesgue measure on} \right. \\ \left. \left(\Lambda \times \mathbb{T}^{p-1} \right), \text{ with density } (v(t, \cdot), u(t, \cdot)) \in [0, 1]^\Lambda \times [0, 1]^{\mathbb{T}^{p-1}} \right\}.$$

Indeed, the simple exclusion rule provides the controls

$$|\langle \pi^{\text{field}}(t), G \rangle| \leq \|G\|_{L^1(\Lambda)} \quad \text{and} \quad |\langle \pi^{\text{road}}(t), H \rangle| \leq \|H\|_{L^1(\mathbb{T}^{p-1})},$$

for any $t \in [0, T]$, $G \in \mathcal{C}(\bar{\Lambda})$ and $H \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^{p-1})$. The conclusion of the proposition follows from this and the Lusin theorem.

2.4.2 The limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ load paths whose densities satisfy (W1)

The next step consists in showing that the limit trajectories own the regularity claimed in (W1). Let us define the set \mathcal{S}_{w1} by

$$\mathcal{S}_{\text{w1}} := \left\{ \left(\pi^{\text{field}}(t), \pi^{\text{road}}(t) \right)_{t \in [0, T]} = \left(v(t, \hat{x}) d\hat{x}, u(t, x) dx \right)_{t \in [0, T]} \mid (v, u) \text{ satisfies condition (W1)} \right\}.$$

Then we have the following proposition.

Proposition 2.7 (Identification of the limit sets) *Let \mathbb{Q}_∞ be a limit point of the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$. Then,*

$$\mathbb{Q}_\infty(\mathcal{S}_{\text{w1}}) = 1. \quad (2.34)$$

The function $u(t, \cdot)$ being in $L^2(\mathbb{T}^{p-1})$ directly follows from the simple exclusion rule which forces u to be positive and bounded by 1. On the other hand, $v(t, \cdot)$ being in $\mathcal{H}^1(\Lambda)$ comes from the Riesz representation theorem combined with the following energy estimate.

Lemma 2.8 (Energy estimate) *Given $v \in L^2(0, T; L^2(\Lambda))$ and $1 \leq q \leq p$, consider the (potentially infinite) quantity*

$$E_q(v) := \sup_{G \in \mathcal{C}_c^{0,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})} \left\{ \int_0^T \langle v(s), \partial_{e_q} G(s) \rangle_\Lambda ds - \frac{1}{2} \int_0^T \|G(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 ds \right\}. \quad (2.35)$$

Then, for any $q \in \llbracket 1; p \rrbracket$,

$$\mathbb{Q}_\infty \left(\left(\pi^{\text{field}}(t), \pi^{\text{road}}(t) \right)_{t \in [0, T]} = \left(v(t, \hat{x}) d\hat{x}, u(t, x) dx \right)_{t \in [0, T]} \mid E_q(v) < +\infty \right) = 1.$$

A proof of Lemma 2.8 is given in Appendix 2.A.3.

2.4.3 Replacement lemmas

Before to proceed with the limit equations satisfied by the densities loaded by the limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$, we need to state two Replacement lemmas to correctly ensure the convergence of the boundary terms of the martingale \mathcal{M}_N towards those of the weak formulation in (W2) — see subsection (2.4.4) for details. The essence of these lemmas lies in comparing the occupancy status of η at the boundary sites to the average number of particles in their immediate vicinity. To state such a result, we must define these “substitute objects”. For fixed $\hat{i} \in \Gamma_N$ and $\varepsilon > 0$, let

$$\Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N} := \left\{ \hat{k} \in \Lambda_N : |\hat{i} - \hat{k}| \leq \varepsilon N \right\} = \Lambda_N \cap \left\{ \hat{i} + [-\varepsilon N, \varepsilon N]^p \right\}, \quad (2.36)$$

and define for $\eta \in S_N^{\text{field}}$ the average number of particle of η inside the box $\Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N}$, that is

$$\eta^{\varepsilon N}(\hat{i}) := c_{N, \varepsilon} \sum_{\hat{k} \in \Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N}} \eta(\hat{k}), \quad (2.37)$$

where $c_{N, \varepsilon}$ is the number of sites inside $\Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N}$, namely,

$$c_{N, \varepsilon} := \frac{1}{|\Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N}|} = \left[\left(2\lfloor \varepsilon N \rfloor + 1 \right)^{p-1} \times \left(\lfloor \varepsilon N \rfloor + 1 \right) \right]^{-1}. \quad (2.38)$$

The upper Replacement lemma is the following.

Lemma 2.9 (Replacement at the upper boundary) *Let $(\mu_N)_{N \geq 2}$ be a sequence of initial measures on S_N . For any $t \in [0, T]$, and any test functions $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$, we have*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i}}{N}) \left[\eta_s^{\varepsilon N}(\hat{i}) - \eta_s(\hat{i}) \right] ds \right| \right] = 0. \quad (2.39)$$

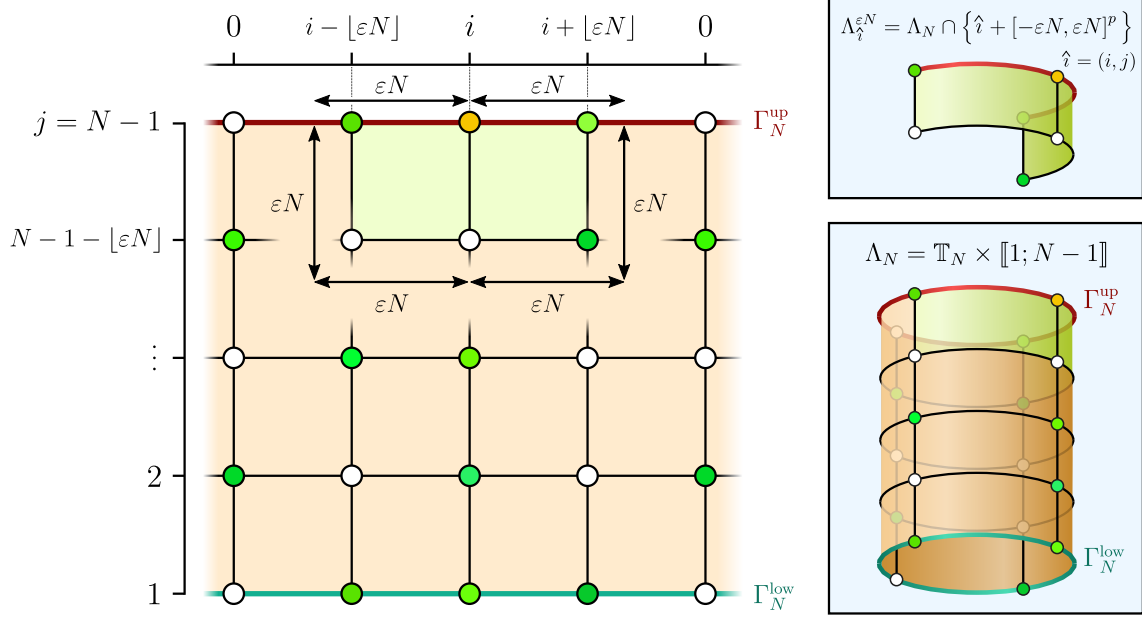


Figure 43 — *The upper Replacement lemma.* For $\hat{i} = (i, j) \in \Gamma_N^{\text{up}}$, we define $\Lambda_{\hat{i}}^{\epsilon N}$ as the intersection between Λ_N and the p -dimensional box of range $2\epsilon N$ centred on \hat{i} . Notice that for fixed $\epsilon > 0$, the size of the box remains constant at the macroscopic scale. Lemma 2.9 establishes that, as $N \rightarrow \infty$ followed by $\epsilon \rightarrow 0$, the value of $\eta(\hat{i})$ can be replaced by $\eta^{\epsilon N}(\hat{i})$ which is the mean value of η inside $\Lambda_{\hat{i}}^{\epsilon N}$.

Similarly, the lower Replacement lemma is the following.

Lemma 2.10 (Replacement at the lower boundary) *Let $(\mu_N)_{N \geq 2}$ be a sequence of initial measures on S_N . For any $t \in [0, T]$, and any test functions $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$, we have*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{low}}} G(s, \frac{\hat{i}}{N}) [\eta_s^{\epsilon N}(\hat{i}) - \eta_s(\hat{i})] ds \right| \right] = 0. \quad (2.40)$$

The proof of the Lemma 2.9 is given in Appendix 2.A.2, while that of Lemma 2.10 is omitted since it follows essentially identical arguments.

2.4.4 The limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$ load paths whose densities satisfy (W2)

We claim now that all the limit trajectories are supported on the set \mathcal{S}_{W2} of measures with density (v, u) that satisfy the weak formulation associated with (2.2)-(2.3), namely

$$\mathcal{S}_{\text{W2}} := \left\{ \left(\pi^{\text{field}}(t), \pi^{\text{road}}(t) \right)_{t \in [0, T]} = \left(v(t, \hat{x}) d\hat{x}, u(t, x) dx \right)_{t \in [0, T]} \mid (v, u) \text{ satisfies condition (W2)} \right\}.$$

Proposition 2.11 (Identification of the limit equations) *Let \mathbb{Q}_∞ be a limit point of the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$. Then,*

$$\mathbb{Q}_\infty(\mathcal{S}_{w_2}) = 1. \quad (2.41)$$

To establish Proposition 2.11, we need to demonstrate that each component of the martingale $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}} + \mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}$, as detailed in (2.19)-(2.20), converges towards its respective counterpart in the weak formulation (2.10)-(2.11), and then that the martingale itself vanishes as $N \rightarrow \infty$. This requires the two Replacement lemmas (Lemma 2.9 and Lemma 2.10), which allow the substitution of terms not expressed through the empirical measure π_N in the martingale \mathcal{M}_N , and the identification of the limit sets (Proposition 2.7), that is essential to define the trace of the function $v(t, \cdot)$ at the lower boundary.

Proof of Proposition 2.11. Let $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$ and $H \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$. For practical reasons, let us define here the functional $\mathcal{W}_{u,v}(t) := \mathcal{W}_{u,v,G}^{\text{field}}(t) + \mathcal{W}_{u,v,H}^{\text{road}}(t)$ associated with the weak formulation (2.10)-(2.11) in (W2):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{u,v,G}^{\text{field}}(t) &:= \langle v(t), G(t) \rangle_\Lambda - \langle v_0, G(0) \rangle_\Lambda - \int_0^t \langle v(s), \partial_s G(s) \rangle_\Lambda ds - \int_0^t \langle v(s), d\Delta G(s) \rangle_\Lambda ds \\ &+ \int_0^t \langle v|_{y=1}(s), d\partial_y G|_{y=1}(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds - \int_0^t \langle v|_{y=0}(s), d\partial_y G|_{y=0}(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds \\ &- \int_0^t \alpha \langle u(s) - v|_{y=0}(s), G|_{y=0}(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds, \end{aligned} \quad (2.42)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{u,v,H}^{\text{road}}(t) &:= \langle u(t), H(t) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \langle u_0, H(0) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \int_0^t \langle u(s), \partial_s H(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds \\ &- \int_0^t \langle u(s), D\Delta_x H(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds - \int_0^t \alpha \langle v|_{y=0}(s) - u(s), H(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Given \mathbb{Q}_∞ in the closure of the sequence $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$, the statement of Proposition 2.11 can then be reformulated as

$$\mathbb{Q}_\infty \left(\left(\pi^{\text{field}}(t), \pi^{\text{road}}(t) \right)_{t \in [0, T]} = \left(v(t, \hat{x}) d\hat{x}, u(t, x) dx \right)_{t \in [0, T]} \mid \mathcal{W}_{u,v,G}^{\text{field}}(t) = \mathcal{W}_{u,v,H}^{\text{road}}(t) = 0 \right) = 1.$$

To prove this, it is sufficient to establish that of any $t \in [0, T]$ and $\delta > 0$ there holds

$$\mathbb{Q}_\infty \left(\left| \mathcal{W}_{u,v}(t) \right| > \delta \right) = 0. \quad (2.44)$$

At this point, to work with the probability measures $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$ (that do not load paths with densities) instead of \mathbb{Q}_∞ , we need to substitute the quantity $\mathcal{W}_{u,v}(t)$ with another one which only depends on measures π^{field} and π^{road} instead of v and u . This substitution cannot be

2.4. Characterization of the limit points of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$

made directly because of the boundary terms in (2.42) and (2.43). To overcome this issue, let us introduce the two families of unit approximations indexed by $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{U}_\varepsilon^{\text{up}} := \frac{1}{\varepsilon(2\varepsilon)^{p-1}} \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]^{p-1} \times [0, \varepsilon]} \quad \text{and} \quad \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}} := \frac{1}{\varepsilon(2\varepsilon)^{p-1}} \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]^{p-1} \times [-\varepsilon, 0]},$$

defined for all $x \in \mathbb{T}^{p-1}$ and $y \in \mathbb{R}$. Observe that $\eta^{\varepsilon N}(\hat{\imath})$ defined in (2.37) can then be rewritten for any $\hat{\imath} \in \Gamma_N = \Gamma_N^{\text{up}} \cup \Gamma_N^{\text{low}}$, $\varepsilon > 0$ and $N \geq 2$ as

$$\eta^{\varepsilon N}(\hat{\imath}) = \tilde{c}_{N, \varepsilon} [\pi_N^{\text{field}} * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{up}}](\hat{\imath}/N), \quad \text{if } \hat{\imath} \in \Gamma_N^{\text{up}}, \quad (2.45)$$

and

$$\eta^{\varepsilon N}(\hat{\imath}) = \tilde{c}_{N, \varepsilon} [\pi_N^{\text{field}} * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}](\hat{\imath}/N), \quad \text{if } \hat{\imath} \in \Gamma_N^{\text{low}}, \quad (2.46)$$

where

$$\tilde{c}_{N, \varepsilon} = \frac{(2\varepsilon N)^{p-1}(\varepsilon N)}{(2[\varepsilon N]+1)^{p-1}([\varepsilon N]+1)} \quad \text{for any } \varepsilon > 0 \text{ and any } N \geq 2.$$

Now for $\varepsilon > 0$, $\pi = (\pi^{\text{field}}, \pi^{\text{road}}) \in \mathcal{M}$, and $t \in [0, T]$, we let $\mathscr{W}_\pi^\varepsilon(t) := \mathscr{W}_{\pi, G, \varepsilon}^{\text{field}}(t) + \mathscr{W}_{\pi, H, \varepsilon}^{\text{road}}(t)$ with

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_{\pi, G, \varepsilon}^{\text{field}}(t) &:= \langle \pi^{\text{field}}(t), G(t) \rangle - \langle \pi^{\text{field}}(0), G(0) \rangle - \int_0^t \langle \pi^{\text{field}}(s), \partial_s G(s) \rangle ds - \int_0^t \langle \pi^{\text{field}}(s), d\Delta G(s) \rangle ds \\ &+ \int_0^t \left\langle [\pi^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{up}}]|_{y=1}, d\partial_y G|_{y=1}(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds - \int_0^t \left\langle [\pi^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}]|_{y=0}, d\partial_y G|_{y=0}(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds \\ &- \int_0^t \alpha \langle \pi^{\text{road}}(s), G|_{y=0}(s) \rangle + \int_0^t \alpha \left\langle [\pi^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}]|_{y=0}, G|_{y=0}(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds, \end{aligned} \quad (2.47)$$

and

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_{\pi, H, \varepsilon}^{\text{road}}(t) &:= \langle \pi^{\text{road}}(t), H(t) \rangle - \langle \pi^{\text{road}}(0), H(0) \rangle - \int_0^t \langle \pi^{\text{road}}(s), \partial_s H(s) \rangle ds \\ &- \int_0^t \langle \pi^{\text{road}}(s), D\Delta_x H(s) \rangle ds - \int_0^t \alpha \left\langle [\pi^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}]|_{y=0}, H(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} + \int_0^t \alpha \langle \pi^{\text{road}}(s), H(s) \rangle ds. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Thanks to Proposition 2.7, we know that \mathbb{Q}_∞ loads paths with densities $(v(t, \cdot))_{t \in [0, T]}$ in $L^2(0, T; \mathcal{H}^1(\Lambda))$. As a consequence, the trace of $v(t, \cdot)$ at the boundaries Γ^{up} and Γ^{low} is well-defined and we have (see [66, Section 5.3])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\pi^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{up}}]|_{\hat{x} \in \Gamma} = \text{Tr}(v), \quad \mathbb{Q}_\infty\text{-almost-surely in } \Gamma.$$

As a result of this

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \mathscr{W}_{u, v}(t) - \mathscr{W}_\pi^\varepsilon(t) \right| = 0, \quad \mathbb{Q}_\infty\text{-almost-surely in } \Gamma. \quad (2.49)$$

We can now bound the probability in (2.44) as follows

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}_\infty \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{u,v}(t)| > \delta \right) &= \mathbb{Q}_\infty \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{u,v}(t) - \mathcal{W}_\pi^\varepsilon(t) + \mathcal{W}_\pi^\varepsilon(t)| > \delta \right) \\
 &\leq \mathbb{Q}_\infty \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{u,v}(t) - \mathcal{W}_\pi^\varepsilon(t)| > \delta/2 \right) + \mathbb{Q}_\infty \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_\pi^\varepsilon(t)| > \delta/2 \right) \\
 &\leq \mathbb{Q}_\infty \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{u,v}(t) - \mathcal{W}_\pi^\varepsilon(t)| > \delta/2 \right) + \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{\pi_N}^\varepsilon(t)| > \delta/2 \right), \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

where we used the Portmanteau Theorem to write the last inequality. While the vanishing of the first term in (2.50) as ε goes to zero is a straight consequence of (2.49), the second one requires further attention. By considering the probability under the limit in this second term, we control it by this way:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{\pi_N}^\varepsilon(t)| > \delta/2 \right) &= \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{\pi_N}^\varepsilon(t) - \mathcal{M}_N(t) + \mathcal{M}_N(t)| > \delta/2 \right) \\
 &\leq \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{\pi_N}^\varepsilon(t) - \mathcal{M}_N(t)| > \delta/4 \right) + \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{M}_N(t)| > \delta/4 \right), \\
 &\leq \frac{4}{\delta} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{W}_{\pi_N}^\varepsilon(t) - \mathcal{M}_N(t)| \right) + \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{M}_N(t)| > \delta/4 \right), \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

where we recall that the martingale $\mathcal{M}_N(t)$ is defined in (2.15). In (2.51), the vanishing of $\mathbb{Q}_N^{\mu_N}(|\mathcal{M}_N(t)| > \delta/4)$ can be shown by using the Doob's inequality:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}_N^{\mu_N} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{M}_N(t)| > \delta/4 \right) &\leq \frac{16}{\delta^2} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left([\mathcal{M}_N(t)]^2 \right) \stackrel{(2.17)}{=} \frac{16}{\delta^2} \left[\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\mathcal{N}_N(t) + \int_0^t \mathcal{B}_N(s) ds \right) \right] \\
 &= \frac{16}{\delta^2} \left[\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left(\int_0^t \mathcal{B}_N(s) ds \right) \right],
 \end{aligned}$$

that goes to zero as $N \rightarrow \infty$ — see the control of $\mathcal{B}_N(s)$ below (2.31). Now we focus on the remaining expectation in (2.51), and note that the quantity $|\mathcal{W}_{\pi_N}^\varepsilon(t) - \mathcal{M}_N(t)|$ can be bounded by the sum of the following terms

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \langle \pi_N^{\text{field}}(s), d(\Delta - \Delta_x^N + \partial_{yy}^N)G(s) \rangle + O(1/N) ds \right|, \quad (2.52)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left\langle [\pi_N^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{up}}]_{|y=1}, d\partial_y G|_{y=1}(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} d\partial_y^N G(s, \frac{i}{N}) \times \eta_s(i) ds \right|, \quad (2.53)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left\langle [\pi_N^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}]_{|y=0}, d\partial_y G|_{y=0}(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} d\partial_y^N G(s, \frac{i}{N}) \times \eta_s(i) ds \right|, \quad (2.54)$$

2.5. Uniqueness of the solution

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \alpha \left\langle [\pi_N^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}]|_{y=0}, G|_{y=0}(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \frac{\alpha}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} G(s, \frac{i}{N}) \times \eta_s(i) ds \right|, \quad (2.55)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \alpha \left\langle \pi_N^{\text{road}}(s), G|_{y=0}(s) - G|_{y=\frac{1}{N}}(s) \right\rangle ds \right|, \quad (2.56)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \frac{1}{N^p} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{i}{N}) \times (b - \eta_s(i)) ds \right|, \quad (2.57)$$

for the “field parts”, and

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left\langle \pi_N^{\text{road}}(s), D(\Delta_x - \Delta_x^N)H(s) \right\rangle ds \right|, \quad (2.58)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \alpha \left\langle [\pi_N^{\text{field}}(s) * \mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}]|_{y=0}, H(s) \right\rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} - \frac{\alpha}{N^{p-1}} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} H(s, \frac{i}{N}) \times \eta_s(i) ds \right|, \quad (2.59)$$

for the “road parts”. To conclude this proof, it remains to argue that all these terms (2.52)-(2.59) vanish in the limit $N \rightarrow \infty$ then $\varepsilon \rightarrow 0$. First of all, due to the regularity of the test functions G and H , it is clear that (2.52), (2.56) and (2.58) go to zero as $N \rightarrow \infty$. Notice then that (2.57) associated to the upper spawn/kill dynamics is a $O(1/N)$. Lastly, the vanishing of (2.53)-(2.54)-(2.55)-(2.59) arises from the Replacement lemmas (Lemma 2.9 and Lemma 2.10), the approximation of $\eta_s^{\varepsilon N}(i)$ with the convolution products (2.45) and (2.46), and the regularity of the test functions G and H . \square

2.5 Uniqueness of the solution

In this last section, we establish the uniqueness of the weak solutions to the Cauchy problem (2.2)-(2.3) in the sense (W1)-(W2). Our proof relies on testing the weak formulation (W2) against the solutions (G, H) to a “dual problem” related to (2.2).

Proposition 2.12 (Uniqueness) *There exists at most one solution (v, u) to the Cauchy problem (2.2)-(2.3) in the sense (W1)-(W2).*

Proof of Proposition 2.12 (Uniqueness). By linearity it is enough to consider the case $(v_0, u_0) \equiv (0, 0)$. Given any $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \Lambda)$ and any $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$, we consider the problem

$$\begin{cases} -\partial_t G - d\Delta G = \varphi, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ -d\partial_y G|_{y=0} = \alpha(H - G|_{y=0}), & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 0, \\ -\partial_t H - D\Delta_x H - \alpha(G|_{y=0} - H) = \psi, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \\ \partial_y G|_{y=0} = 0, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 1, \end{cases} \quad (2.60)$$

supplemented with final condition

$$\begin{cases} G|_{t=T} \equiv 0, & x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ H|_{t=T} \equiv 0, & x \in \mathbb{T}^{p-1}. \end{cases} \quad (2.61)$$

By letting $(\tilde{G}(t), \tilde{H}(t)) = (G(T-t), H(T-t))$, we can notice that the problem (2.60)-(2.61) is actually a reversed-time field-road system with sources, namely

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{G} = d\Delta \tilde{G} + \varphi, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y \in (0, 1), \\ -d\partial_y \tilde{G}|_{y=0} = \alpha(\tilde{H} - \tilde{G}|_{y=0}), & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 0, \\ \partial_t \tilde{H} = D\Delta_x \tilde{H} + \alpha(\tilde{G}|_{y=0} - \tilde{H}) + \psi, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \\ \partial_y \tilde{G}|_{y=0} = 0, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{T}^{p-1}, \quad y = 1, \end{cases} \quad (2.62)$$

provided with trivial initial data. In absence of sources, the solution is explicitly known through the “field-road heat kernel”, that could be computed as in [6]. By combining this with the Duhamel principle, see [82, Chapter 4, Section 3] for instance, we obtain the classical solution to the above problem with sources. As a result, we own $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$ and $H \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$ that satisfy (2.60)-(2.61), and that are sufficiently smooth to be tested in the weak formulation (W2). By plugging (G, H) into (2.10) and (2.11), and then summing the two obtained results, we are left with

$$\int_0^T \langle v(s), \varphi(s) \rangle_{\Lambda} ds + \int_0^T \langle u(s), \psi(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds = 0,$$

that holds for any $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \Lambda)$ and any $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1})$. In particular we have

$$\begin{cases} \int_0^T \langle v(s), \varphi(s) \rangle_{\Lambda} ds = 0, & \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \Lambda), \\ \int_0^T \langle u(s), \psi(s) \rangle_{\mathbb{T}^{p-1}} ds = 0, & \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^{p-1}). \end{cases} \quad (2.63)$$

From (2.63), we can deduce that v and u are both identically zero, see [35, Lemma IV.2], and the proof is therefore completed. \square

Acknowledgement. Matthieu Alfaro is supported by the *région Normandie* project BIOMA-NORMAN 21E04343 and the ANR project DEEV ANR-20-CE40-0011-01. Samuel Tréton would like to acknowledge the *région Normandie* for the financial support of his PhD.

2.A Appendix

2.A.1 Some tools and basic estimates

To prove the upper Replacement lemma (Lemma 2.9) and the energy estimate (Lemma 2.8), we first need to introduce the relative entropy \mathcal{H} and the Dirichlet form \mathcal{D}_N . These

2.A. Appendix

notions are rather classical and can be found in [93, Appendix 1, Sections 7-8-9-10] for instance.

For $\gamma \in (0, 1)$, we denote by $\nu_N = \nu_{N,\gamma}^{\text{field}} \otimes \nu_{N,\gamma}^{\text{road}}$ the Bernoulli product measure on S_N whose marginals are given by

$$\nu_{N,\gamma}^{\text{field}}[\eta(\hat{i}) = \bullet] = \begin{cases} \gamma & \text{if } \bullet = 1, \\ 1 - \gamma & \text{if } \bullet = 0, \end{cases} \quad \text{for any } \hat{i} \in \Lambda_N, \text{ and}$$

$$\nu_{N,\gamma}^{\text{road}}[\xi(i) = \bullet] = \begin{cases} \gamma & \text{if } \bullet = 1, \\ 1 - \gamma & \text{if } \bullet = 0, \end{cases} \quad \text{for any } i \in \Gamma_N^{\text{low}}.$$

The probability measure ν_N on S_N offers interesting properties to work with the relative entropy and the Dirichlet form. Indeed, since ν_N gives a positive probability to each configuration $(\eta, \xi) \in S_N$, any probability measure μ_N on S_N is absolutely continuous with respect to ν_N . Moreover, the changes of variable of type “flip” or “switch” as done below are very simple to express when integrating with respect to ν_N .

For a probability measure μ_N on S_N , the entropy of μ_N with respect to ν_N is defined as the positive value

$$\mathcal{H}(\mu_N|\nu_N) := \sup_{f \in \mathbb{R}^{S_N}} \left\{ \int_{S_N} f(\eta, \xi) d\mu_N(\eta, \xi) - \log \left[\int_{S_N} e^{f(\eta, \xi)} d\nu_N(\eta, \xi) \right] \right\}.$$

Since μ_N is absolutely continuous with respect to ν_N , the entropy can be explicitly written as [93, Appendix 1, Sections 8, Theorem 8.3]

$$\mathcal{H}(\mu_N|\nu_N) = \int_{S_N} \log \left[\frac{d\mu_N}{d\nu_N}(\eta, \xi) \right] d\mu_N(\eta, \xi) = \sum_{(\eta, \xi) \in S_N} \mu_N(\eta, \xi) \log \left[\frac{\mu_N(\eta, \xi)}{\nu_N(\eta, \xi)} \right],$$

where $d\mu_N/d\nu_N$ denotes the Radon-Nikodym derivative of μ_N with respect to ν_N and the last equality is a consequence of the finiteness of S_N . By decomposing μ_N as a convex combination of Dirac masses and using the convexity of the entropy, we can show that

$$\mathcal{H}(\mu_N|\nu_N) \leq C_0 N^p, \quad (2.64)$$

for $C_0 := -\log(\min(\gamma, 1 - \gamma)) > 0$.

Given a function $f : S_N \rightarrow \mathbb{R}$, the Dirichlet form associated to the dynamics writes

$$\mathcal{D}_N(f, \nu_N) := -\langle \mathcal{L}_N f, f \rangle_{\nu_N} \quad (2.65)$$

and may be split following the different parts of \mathcal{L}_N — see (2.4) — into

$$\mathcal{D}_N = N^2 \mathbb{D}_N^{\text{field}} + N^2 \mathbb{D}_N^{\text{road}} + N D_N^{\text{Rob}} + D_N^{\text{reac}} + D_N^{\text{up}}. \quad (2.66)$$

At some points in the proofs of upper Replacement lemma (Lemma 2.9) and the energy estimate (Lemma 2.8), it becomes essential to control each component of \mathcal{D}_N . These controls are encapsulated in Lemma 2.13 below, and require to introduce the functional

$$\mathcal{I}_N = \mathcal{I}_N(f, \nu_N) := N^2 \mathbb{I}_N^{\text{field}} + N^2 \mathbb{I}_N^{\text{road}} + N I_N^{\text{Rob}} + I_N^{\text{reac}} + I_N^{\text{up}}, \quad (2.67)$$

where, for any $f : S_N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}_N^{\text{field}}(f, \nu_N) := \frac{d}{2} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi),$$

$$\mathbb{I}_N^{\text{road}}(f, \nu_N) := \frac{D}{2} \sum_{\substack{i, k \in \Gamma_N^{\text{low}} \\ |i - k| = 1}} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta, \xi^{i, k})} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi),$$

$$I_N^{\text{Rob}}(f, \nu_N) := \alpha \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (\eta(i) - \xi(i))^2 \left[\sqrt{f(\eta^i, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi),$$

$$I_N^{\text{reac}}(f, \nu_N) := \alpha \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (\eta(i) - \xi(i))^2 \left[\sqrt{f(\eta, \xi^i)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi),$$

$$I_N^{\text{up}}(f, \nu_N) := \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} (b(1 - \eta(i)) + (1 - b)\eta(i)) \left[\sqrt{f(\eta^i, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi),$$

are all nonnegative.

Lemma 2.13 (Control of the Dirichlet forms) *For any density function $f : S_N \rightarrow \mathbb{R}$ with respect to the Bernoulli product measure ν_N on S_N with parameter γ , we have*

(D1) *For any $\gamma \in (0, 1)$,*

$$\langle \mathbb{I}_N^{\text{field}} \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} = -\mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) = -\frac{1}{2} \mathbb{I}_N^{\text{field}}(f, \nu_N). \quad (2.68)$$

(D2) *For any $\gamma \in (0, 1)$,*

$$\langle \mathbb{I}_N^{\text{road}} \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} = -\mathbb{D}_N^{\text{road}}(\sqrt{f}, \nu_N) = -\frac{1}{2} \mathbb{I}_N^{\text{road}}(f, \nu_N). \quad (2.69)$$

(D3) *For any $\gamma \in (0, 1)$,*

$$\langle L_N^{\text{Rob}} \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} = -D_N^{\text{Rob}}(\sqrt{f}, \nu_N) = -\frac{1}{2} I_N^{\text{Rob}}(f, \nu_N) + \varepsilon_N(\alpha, \gamma, f). \quad (2.70)$$

(D4) For any $\gamma \in (0, 1)$,

$$\langle L_N^{\text{reac}} \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} = -D_N^{\text{reac}}(\sqrt{f}, \nu_N) = -\frac{1}{2} I_N^{\text{reac}}(f, \nu_N) + \varepsilon_N(\alpha, \gamma, f). \quad (2.71)$$

(D5) For $\gamma = b$,

$$\langle L_N^{\text{wp}} \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} = -D_N^{\text{wp}}(\sqrt{f}, \nu_N) = -\frac{1}{2} I_N^{\text{wp}}(f, \nu_N). \quad (2.72)$$

In (D3) and (D4), $\varepsilon_N(\alpha, \gamma, f)$ is twice the same quantity, and such that

$$|\varepsilon_N(\alpha, \gamma, f)| \leq c(\gamma) \alpha N^{p-1}. \quad (2.73)$$

Proof of Lemma 2.13, (D1). By writing $\mathbb{D}_N^{\text{field}}$ from (2.65) and (2.5), we get

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= \frac{d}{4} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right] \sqrt{f(\eta, \xi)} \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{d}{4} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right] \sqrt{f(\eta, \xi)} \, d\nu_N(\eta, \xi). \end{aligned}$$

We use then the change of variable $\tilde{\eta} := \eta^{\hat{i}, \hat{k}}$ in the second integral. Since the measure ν_N is a Bernoulli product measure with constant parameter γ , this change of variable remains transparent for ν_N . We thus have

$$\begin{aligned} -\mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= \frac{d}{4} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right] \sqrt{f(\eta, \xi)} \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{d}{4} \sum_{\substack{\hat{i}, \hat{k} \in \Lambda_N \\ |\hat{i} - \hat{k}| = 1}} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta, \xi)} - \sqrt{f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi)} \right] \sqrt{f(\eta^{\hat{i}, \hat{k}}, \xi)} \, d\nu_N(\eta, \xi) \end{aligned}$$

from which follows (2.68). □

Proof of Lemma 2.13, (D2). Follow the same method as in the proof of (D1). □

Proof of Lemma 2.13, (D3). For clarity, let us introduce the notations

$$F := \sqrt{f(\eta, \xi)} \quad \text{and} \quad F^i := \sqrt{f(\eta^i, \xi)}. \quad (2.74)$$

By writing $\mathbb{D}_N^{\text{field}}$ from (2.65) and (2.7), we get

$$\begin{aligned} -D_N^{\text{Rob}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (\eta(i) - \xi(i))^2 (F^i - F) F \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (\eta(i) - \xi(i))^2 (F^i - F) F \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (\eta(i) - \xi(i))^2 (F^i - F) F \, d\nu_N(\eta, \xi). \end{aligned}$$

We then use the change of variable $\tilde{\eta} := \eta^i$ in the integral of the second and third line so that we have

$$\nu_N(\tilde{\eta}, \xi) = \nu_N(\eta, \xi) \times \begin{cases} \gamma/(1-\gamma) & \text{if } \eta(i) = 0, \\ (1-\gamma)/\gamma & \text{if } \eta(i) = 1, \end{cases} = \nu_N(\eta, \xi) \times \begin{cases} 1 + \frac{2\gamma-1}{1-\gamma} & \text{if } \eta(i) = 0, \\ 1 + \frac{1-2\gamma}{\gamma} & \text{if } \eta(i) = 1. \end{cases}$$

This results in

$$\begin{aligned} -D_N^{\text{Rob}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (\eta(i) - \xi(i))^2 (F^i - F) F \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (1 - \eta(i) - \xi(i))^2 (F - F^i) F^i \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \frac{1-\gamma}{2\gamma-1} \int_{S_N} (1 - \tilde{\eta}(i) - \xi(i))^2 (F - F^i) F^i \, d\nu_N(\tilde{\eta}, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \frac{\gamma}{1-2\gamma} \int_{S_N} (1 - \tilde{\eta}(i) - \xi(i))^2 (F - F^i) F^i \, d\nu_N(\tilde{\eta}, \xi). \end{aligned}$$

Now observe that $(1 - \eta(i) - \xi(i))^2 = (\eta(i) - \xi(i))^2 + (1 - 2\eta(i))(1 - 2\xi(i))$ and plug this into the second line above. This directly yields (2.70) with

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(\alpha, \gamma, f) &= \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \int_{S_N} (1 - 2\eta(i))(1 - 2\xi(i))(F - F^i) F^i \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \frac{1-\gamma}{2\gamma-1} \int_{S_N} (1 - \eta(i) - \xi(i))^2 (F - F^i) F^i \, d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{low}}} \frac{\gamma}{1-2\gamma} \int_{S_N} (1 - \eta(i) - \xi(i))^2 (F - F^i) F^i \, d\nu_N(\eta, \xi), \end{aligned}$$

and the control of \mathcal{E}_N (2.73) arises from the Cauchy-Schwarz inequality and the fact that f is a density with respect to the Bernoulli product measure ν_N . \square

Proof of Lemma 2.13, (D4). Follow the same method as in the proof of (D3). \square

Proof of Lemma 2.13, (D5). As in the proof of (D3), we employ the notations F and F^i defined in (2.74). By writing D_N^{up} from (2.65) and (2.9), we get

$$\begin{aligned} -D_N^{\text{up}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= b \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=0} (F^i F - \frac{1}{2} F^2) d\nu_N(\eta, \xi) - b \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=0} \frac{1}{2} F^2 d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad + (1-b) \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=1} (F^i F - \frac{1}{2} F^2) d\nu_N(\eta, \xi) - (1-b) \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=1} \frac{1}{2} F^2 d\nu_N(\eta, \xi). \end{aligned}$$

We then use the change of variable $\tilde{\eta} := \eta^i$ in the second and fourth integrals above so that we have

$$\nu_N(\tilde{\eta}, \xi) = \nu_N(\eta, \xi) \times \begin{cases} \gamma/(1-\gamma) & \text{if } \eta(i) = 0, \\ (1-\gamma)/\gamma & \text{if } \eta(i) = 1, \end{cases}$$

resulting in

$$\begin{aligned} -D_N^{\text{up}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= b \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=0} (F^i F - \frac{1}{2} F^2) d\nu_N(\eta, \xi) - \frac{(1-\gamma)b}{\gamma} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\tilde{\eta}(i)=1} \frac{1}{2} (F^i)^2 d\nu_N(\tilde{\eta}, \xi) \\ &\quad + (1-b) \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=1} (F^i F - \frac{1}{2} F^2) d\nu_N(\eta, \xi) - \frac{\gamma(1-b)}{1-\gamma} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\tilde{\eta}(i)=0} \frac{1}{2} (F^i)^2 d\nu_N(\tilde{\eta}, \xi). \end{aligned}$$

By choosing $\gamma = b$, we get

$$\begin{aligned} -D_N^{\text{up}}(\sqrt{f}, \nu_N) &= -\frac{b}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=0} \left(F^2 - 2F^i F + (F^i)^2 \right) d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\quad - \frac{1-b}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \int_{\eta(i)=1} \left(F^2 - 2F^i F + (F^i)^2 \right) d\nu_N(\eta, \xi) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in \Gamma_N^{\text{up}}} \int_{S_N} \left(b(1-\eta(i)) + (1-b)\eta(i) \right) (F^i - F)^2 d\nu_N(\eta, \xi), \end{aligned}$$

that is (2.72). □

We also need some useful inequalities that are gathered in the following lemma.

Lemma 2.14 (Useful inequalities)

(I1) For any sequence of positive numbers (a_N) and (b_N) , we have

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log(a_N + b_N) \leq \max \left(\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log(a_N), \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log(b_N) \right).$$

(I2) For any $z \in \mathbb{R}$ we have $e^{|z|} \leq e^z + e^{-z}$.

(I3) For any $X, Y \in \mathbb{R}$ and any $B > 0$, we have $XY \leq \frac{1}{2B}X^2 + \frac{B}{2}Y^2$.

(I4) For any $X, Y \in \mathbb{R}$, we have $\frac{(X+Y)^2}{2} \leq X^2 + Y^2$.

2.A.2 Proof of the upper Replacement lemma

Proof of Lemma 2.9 (Replacement at the upper boundary). Consider the term under the integral in (2.39), namely

$$A_{N,\varepsilon}(G(s, \frac{\hat{i}}{N}), \eta_s) := \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i}}{N}) [\eta_s^{\varepsilon N}(\hat{i}) - \eta_s(\hat{i})]. \quad (2.75)$$

We develop $\eta_s^{\varepsilon N}(\hat{i})$ in (2.75) with (2.37) and express that $\hat{i} + \hat{k}$, with $\hat{k} = (k, \ell)$, browses $\Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N}$. This yields

$$A_{N,\varepsilon}(G(s, \frac{\hat{i}}{N}), \eta_s) = \sum_{k \in [-\lceil \varepsilon N \rceil, \lceil \varepsilon N \rceil]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{C_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i}}{N}) [\eta_s(\hat{i} + \hat{k}) - \eta_s(\hat{i})]. \quad (2.76)$$

In (2.76), focus on

$$\sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i}}{N}) \eta_s(\hat{i} + \hat{k}) = \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} \left[G(s, \frac{\hat{i}}{N}) - G(s, \frac{\hat{i} + \hat{k}}{N}) \right] \eta_s(\hat{i} + \hat{k}) + \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i} + \hat{k}}{N}) \eta_s(\hat{i} + \hat{k}). \quad (2.77)$$

Since $G \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$, the Mean Value Theorem allows to control, in the first sum of (2.77),

$$\left| G(s, \frac{\hat{i}}{N}) - G(s, \frac{\hat{i} + \hat{k}}{N}) \right| \leq p\varepsilon \sup_{s \in [0, T]} \|\nabla G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)}. \quad (2.78)$$

For the second sum in (2.77), notice that we have, thanks to the periodicity of the torus \mathbb{T}_N and the Mean Value Theorem,

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i} + \hat{k}}{N}) \eta_s(\hat{i} + \hat{k}) &= \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i+k}{N}, \frac{\ell}{N}) \eta_s(i+k, \ell) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i}{N}, \frac{\ell}{N}) \eta_s(i, \ell) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} \left[G(s, \frac{i}{N}, \frac{N-1}{N}) + \frac{N-1-\ell}{N} C_1(G, N) \right] \eta_s(i, \ell), \end{aligned} \quad (2.79)$$

where there is $y \in (0, 1)$ such that

$$|C_1(G, N)| = |\partial_y G(s, \frac{i}{N}, y)| \leq \sup_{s \in [0, T]} \|\nabla G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)}. \quad (2.80)$$

2.A. Appendix

Now using (2.77) and (2.79) into the expression of $A_{N,\varepsilon}$ in (2.76), we obtain

$$A_{N,\varepsilon}(G(s, \frac{\hat{i}}{N}), \eta_s) = \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} \left[G(s, \frac{\hat{i}}{N}) - G(s, \frac{\hat{i}+\hat{k}}{N}) \right] \eta_s(\hat{i} + \hat{k}) \quad (2.81)$$

$$+ \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} \frac{N-1-\ell}{N} C_1(G, N) \eta_s(i, \ell) \quad (2.82)$$

$$+ \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i}{N}, \frac{N-1}{N}) [\eta_s(i, \ell) - \eta_s(i, N-1)]. \quad (2.83)$$

Therefore we have

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} G(s, \frac{\hat{i}}{N}) [\eta_s^{\varepsilon N}(\hat{i}) - \eta_s(\hat{i})] ds \right| \right] \leq \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.81) ds \right| \right] + \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.82) ds \right| \right] + \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.83) ds \right| \right]. \quad (2.84)$$

In (2.84), the vanishing of the two first expectations is a straight consequence of the controls (2.78) and (2.80). Indeed, for the first expectation in (2.84), we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.81) ds \right| \right] \\ &= \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} \left[G(s, \frac{\hat{i}}{N}) - G(s, \frac{\hat{i}+\hat{k}}{N}) \right] \eta_s(\hat{i} + \hat{k}) ds \right| \right] \\ &\leq \int_0^t \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} \underbrace{\left| G(s, \frac{\hat{i}}{N}) - G(s, \frac{\hat{i}+\hat{k}}{N}) \right|}_{\text{control this with (2.78)}} ds \\ &\leq T p \varepsilon \sup_{s \in [0, T]} \|\nabla G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)} \times \underbrace{\sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} c_{N,\varepsilon}}_{=1} \times \underbrace{\frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} 1}_{=1} \\ &= T p \varepsilon \sup_{s \in [0, T]} \|\nabla G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)} \end{aligned}$$

that vanishes as $\varepsilon \rightarrow 0$. Similarly,

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.82) ds \right| \right] \\
 &= \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} \overbrace{\frac{N-1-\ell}{N}}^{\leq \varepsilon} C_1(G, N) \eta_s(i, \ell) ds \right| \right] \\
 &\leq T\varepsilon \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Gamma_N^{\text{up}}} \underbrace{|C_1(G, N)|}_{\text{control this with (2.80)}} \\
 &\leq T\varepsilon \sup_{s \in [0, T]} \|\nabla G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)}
 \end{aligned}$$

that also vanishes as $\varepsilon \rightarrow 0$. The last expectation outlined in (2.84), namely

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.83) ds \right| \right] \\
 &= \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i}{N}, \frac{N-1}{N}) [\eta_s(i, \ell) - \eta_s(i, N-1)] ds \right| \right] \quad (2.85)
 \end{aligned}$$

captures key information about the y -direction of η_s in the region $\Lambda_{\hat{i}}^{\varepsilon N}$. The vanishing of this expectation is actually the core of this proof.

Given any fixed $a > 0$ (which will eventually be increased to $+\infty$), we use the entropy inequality (see [93, Appendix 1, Section 8]) on (2.85). This yields

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.83) ds \right| \right] \leq \frac{1}{aN^p} \log \left[\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \left| \int_0^t (2.83) ds \right| \right) \right] \right] + \frac{1}{aN^p} \mathcal{H}(\mu_N | \nu_N). \quad (2.86)$$

Thanks to the control we have on $\mathcal{H}(\mu_N | \nu_N)$, as outlined in (2.64), the second term in (2.86) is bounded by C_0/a and does not pose a significant issue. Now in the first term of the right-hand side of (2.86), we remark that we can get rid of the absolute value into the exponential. Indeed, by combining (I2) and (I1) in Lemma 2.14 with

$$z = aN^p \int_0^t (2.83) ds, \quad a_n = \mathbb{E}_N^{\nu_N}(e^z), \quad \text{and} \quad b_n = \mathbb{E}_N^{\nu_N}(e^{-z}),$$

we have

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N}(e^{|z|}) \right) \leq \max \left[\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N}(e^z) \right), \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N}(e^{-z}) \right) \right],$$

and therefore (up to take $-G$ instead of G) we only have to prove the vanishing of

$$\frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N}(e^z) \right) = \frac{1}{aN^p} \log \left[\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \int_0^t (2.83) ds \right) \right] \right].$$

2.A. Appendix

We use now the Feynman-Kac's inequality — see [15, Lemma 7.3 in Appendix] — with the operator $\mathcal{L}_N + aN^p V(s, \cdot)$ where

$$V(s, \cdot) : \eta \mapsto \sum_{k \in [-\lceil \varepsilon N \rceil, \lceil \varepsilon N \rceil]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i}{N}, \frac{N-1}{N}) [\eta(i, \ell) - \eta(i, N-1)]. \quad (2.87)$$

With the variational formula (Rayleigh quotient) for the largest (principal) eigenvalue of the operator $\mathcal{L}_N + aN^p V(s, \cdot)$, we are led to

$$\begin{aligned} \frac{1}{aN^p} \log \left[\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \int_0^t (2.83) ds \right) \right] \right] \leq \\ \int_0^t \sup_{\substack{f \text{ density} \\ \text{with respect} \\ \text{to } \nu_N}} \left\{ \int_{S_N} V(s, \eta) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) + \frac{1}{aN^p} \langle \mathcal{L}_N \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} \right\} ds. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Now focus on the integral term into the supremum in (2.88). By using a telescopic sum to write the differences $\eta(i, \ell) - \eta(i, N-1)$ in $V(s, \eta)$ as defined in (2.87), we get

$$\begin{aligned} \int_{S_N} V(s, \eta) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) = \\ \sum_{k \in [-\lceil \varepsilon N \rceil, \lceil \varepsilon N \rceil]^{p-1}} \sum_{\ell = \lceil N-1-\varepsilon N \rceil}^{N-1} \frac{c_{N,\varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i}{N}, \frac{N-1}{N}) \\ \times \sum_{m=\ell}^{N-2} \int_{S_N} [\eta(i, m) - \eta(i, m+1)] f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi). \end{aligned} \quad (2.89)$$

In (2.89), we focus on

$$\begin{aligned} \int_{S_N} [\eta(i, m) - \eta(i, m+1)] f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) = \\ \int_{S_N} \eta(i, m) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) - \int_{S_N} \eta(i, m+1) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi). \end{aligned} \quad (2.90)$$

In the first integral in (2.90), we perform the change of variable

$$\eta \mapsto \eta^{(i,m),(i,m+1)} =: \eta^{\hat{k}_0, \hat{k}_1}.$$

This gives

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_N} [\eta(i, m) - \eta(i, m + 1)] f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) \\
 &= \int_{S_N} \eta(\hat{\kappa}_1) [f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi) - f(\eta, \xi)] d\nu_N(\eta, \xi) \\
 &= \int_{S_N} \eta(\hat{\kappa}_1) \underbrace{\left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right] \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} + \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]}_{\text{use (I3) at this point}} d\nu_N(\eta, \xi). \\
 &\leq \frac{B}{2} \int_{S_N} \eta(\hat{\kappa}_1) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi) \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2B} \int_{S_N} \eta(\hat{\kappa}_1) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} + \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi), \tag{2.92}$$

where $B > 0$ is to be determined later in this proof. In (2.92) we now use (I4) and the fact that f is a density with respect to ν_N to write

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_N} [\eta(i, m) - \eta(i, m + 1)] f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) \\
 &\leq \frac{B}{2} \int_{S_N} \eta(\hat{\kappa}_1) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi) + \frac{2}{B}. \tag{2.93}
 \end{aligned}$$

Incorporating (2.93) into (2.89) yields

$$\begin{aligned}
 & \int_{S_N} V(s, \eta) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) \\
 &\leq \sum_{k \in [-\varepsilon N], [\varepsilon N]]^{p-1}} \sum_{\ell = [N-1-\varepsilon N]}^{N-1} \frac{c_{N, \varepsilon}}{N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} G(s, \frac{i}{N}, \frac{N-1}{N}) \\
 &\quad \times \sum_{m=\ell}^{N-2} \left[\frac{B}{2} \int_{S_N} \eta(\hat{\kappa}_1) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi) + \frac{2}{B} \right] \\
 &\leq \|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)} \left[\frac{B}{2N^{p-1}} \sum_{i \in \mathbb{T}_N^{p-1}} \sum_{m=0}^{N-2} \int_{S_N} \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi) + \frac{2\varepsilon N}{B} \right] \tag{2.94}
 \end{aligned}$$

where we used that $\sum_k \sum_\ell c_{N, \varepsilon} = 1$, $\frac{1}{N^{p-1}} \sum_i 1 = 1$, and

$$N - 1 - \ell \leq \varepsilon N \quad \text{for all } \ell \in \llbracket [N - 1 - \varepsilon N]; N - 1 \rrbracket.$$

Now observe that we can make the Dirichlet form $\mathbb{D}_N^{\text{field}}$ appear in (2.94) thanks to (D1). This results in

$$\int_{S_N} V(s, \eta) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) \leq \|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)} \left[\frac{2B}{dN^{p-1}} \mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) + \frac{2\varepsilon N}{B} \right]. \tag{2.95}$$

2.A. Appendix

By gathering (2.86), (2.88) and (2.95), we obtain

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.83) \, ds \right| \right] \\
& \leq \int_0^t \sup_{\substack{f \text{ density} \\ \text{with respect} \\ \text{to } \nu_N}} \left\{ \|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)} \left[\frac{2B}{dN^{p-1}} \mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) + \frac{2\varepsilon N}{B} \right] + \frac{1}{aN^p} \langle \mathcal{L}_N \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} \right\} ds + \frac{C_0}{a} \\
& \leq \int_0^t \left[\sup_{\substack{f \text{ density} \\ \text{with respect} \\ \text{to } \nu_N}} \left\{ \left[\frac{2B\|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)}}{dN^{p-1}} - \frac{1}{aN^{p-2}} \right] \mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) \right\} + \frac{2\varepsilon N\|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)}}{B} \right] ds + \frac{C_0 + 2c(b)\alpha}{a},
\end{aligned} \tag{2.96}$$

where we used the whole Lemma 2.13 (with $\gamma = b$) and the fact that $-\frac{1}{2}I_N^{\text{road}}$, $-\frac{1}{2}I_N^{\text{up}}$, $-\frac{1}{2}I_N^{\text{reac}}$ and $-\frac{1}{2}I_N^{\text{Rob}}$ are nonpositive to provide the last inequality. At this point, we make the choice $B := dN/(2a\|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)})$ to cancel the supremum in (2.96), so that we are left with

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\left| \int_0^t (2.83) \, ds \right| \right] \leq \frac{4T\varepsilon a}{d} \sup_{s \in [0, T]} \|G(s, \cdot)\|_{L^\infty(\Lambda)}^2 + \frac{C_0 + 2c(b)\alpha}{a}. \tag{2.97}$$

By letting $\varepsilon \rightarrow 0$ and then $a \rightarrow \infty$, we finally get the vanishing of $\mathbb{E}_N^{\mu_N} [|\int_0^t (2.83) \, ds|]$ which, combined with those of $\mathbb{E}_N^{\mu_N} [|\int_0^t (2.81) \, ds|]$ and $\mathbb{E}_N^{\mu_N} [|\int_0^t (2.82) \, ds|]$ in (2.84), completes this proof. \square

2.A.3 Proof of the energy estimate

Proof of Lemma 2.8 (Energy estimate). For $q \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $G \in \mathcal{C}_c^{0,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$ and $v \in L^2(0, T; L^2(\Lambda))$, let us write the quantity below the temporal integral in (2.35) as

$$J_G(s) = J_G(s, v, q) := \left\langle v(s), \partial_{e_q} G(s) \right\rangle_\Lambda - \frac{1}{2} \|G(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2.$$

Now consider a sequence $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense in $\mathcal{C}_c^{0,2}([0, T] \times \bar{\Lambda})$, and observe that it is sufficient to show that there is a constant $C > 0$ such that for any $n_0 \in \mathbb{N}$, we have

$$\mathbb{E}_\infty \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}(s) \, ds \right\} \right] < C, \tag{2.98}$$

where \mathbb{E}_∞ denotes the expectation with respect to \mathbb{Q}_∞ . Since the maps

$$(\pi_N(t))_{t \in [0, T]} \mapsto \int_0^T \left(\langle \pi_N^{\text{field}}(s), \partial_{e_q} G_n(s) \rangle - \frac{1}{2} \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) ds$$

are continuous with respect to the Skorokhod topology, and since the probability \mathbb{Q}_∞ is in the weak closure of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$, then the expectation in (2.98) can be recast

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T \left(\langle \pi_N^{\text{field}}(s), \partial_{e_q} G_n(s) \rangle - \frac{1}{2} \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) ds \right\} \right],$$

that is, by explaining the empirical measure $\pi_N^{\text{field}}(s)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T \underbrace{\left(\frac{1}{N^p} \sum_{\hat{\eta} \in \Lambda_N} \partial_{e_q} G_n(s, \frac{\hat{\eta}}{N}) \times \eta_s(\hat{\eta}) - \frac{1}{2} \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right)}_{=: J_{G_n}^N(s, \eta, q) = J_{G_n}^N(s)} ds \right\} \right] \quad (2.99)$$

For a fixed $a > 0$, we use the entropy inequality (see [93, Appendix 1, Section 8]) to bound the expectation in (2.99) with

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right] \\ & \leq \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \times \max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right) \right] \right) + \frac{1}{aN^p} \mathcal{H}(\mu_N | \nu_N). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Thanks to the control we have on $\mathcal{H}(\mu_N | \nu_N)$, as outlined in (2.64), the second term in (2.100) is bounded by C_0/a and does not pose a significant issue while a remains far from 0. Now focusing on the first term in (2.100), notice that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \times \max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right) \right] & \leq \mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\sum_{n=0}^{n_0} \exp \left(aN^p \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right) \right] \\ & = \sum_{n=0}^{n_0} \mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right) \right]. \end{aligned}$$

This control allows to bootstrap (I1) (cf. Lemma 2.14), providing

$$\begin{aligned} & \limsup_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \times \max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right) \right] \right) \right\} \\ & \leq \max_{0 \leq n \leq n_0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \times \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right) \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Working on the term between the bracket in (2.101), we use the Feynman-Kac's inequality — see [15] (Lemma 7.3 in Appendix) — with the operator $\mathcal{L}_N + aN^p J_{G_n}^N(s, \cdot, q)$. By using the variational formula (Rayleigh quotient) for the largest (principal) eigenvalue of this operator, we are led to

$$\begin{aligned} & \frac{1}{aN^p} \log \left(\mathbb{E}_N^{\nu_N} \left[\exp \left(aN^p \times \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right) \right] \right) \\ & \leq \int_0^T \sup_{\substack{f \text{ density} \\ \text{with respect} \\ \text{to } \nu_N}} \left\{ \int_{S_N} \left(\frac{1}{N^p} \sum_{\hat{\eta} \in \Lambda_N} \eta(\hat{\eta}) \partial_{e_q} G_n(s, \frac{\hat{\eta}}{N}) \right) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) + \frac{1}{aN^p} \langle \mathcal{L}_N \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} \right\} ds \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^T \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.102)$$

2.A. Appendix

Considering the integral term into the supremum in (2.102), the regularity of G enables to write

$$\frac{1}{N^p} \partial_{e_q} G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) = \frac{1}{N^{p-1}} \left(G_n(s, \frac{\hat{\imath}+e_q}{N}) - G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) + o(1/N) \right),$$

so that

$$\begin{aligned} & \int_{S_N} \left(\frac{1}{N^p} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \eta(\hat{\imath}) \partial_{e_q} G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) \\ &= \int_{S_N} \left(\frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \eta(\hat{\imath}) \left(G_n(s, \frac{\hat{\imath}+e_q}{N}) - G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right) \right) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) + o_N(1). \end{aligned}$$

Using then a summation by part (mind the compact support of G) and the change of variable $\eta \mapsto \eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}$, we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{S_N} \left(\frac{1}{N^p} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \eta(\hat{\imath}) \partial_{e_q} G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) - o_N(1) \\ &= \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \int_{S_N} \eta(\hat{\imath}) G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \left(f(\eta, \xi) - f(\eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}, \xi) \right) d\nu_N(\eta, \xi) \\ &= \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \int_{S_N} \eta(\hat{\imath}) G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \underbrace{\left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right] \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}, \xi)} + \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]}_{\text{use (I3) at this point}} d\nu_N(\eta, \xi) \\ &\leq \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \frac{B}{2} \int_{S_N} \eta(\hat{\imath}) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi) \tag{2.103} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \frac{1}{2B} \left(G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right)^2 \int_{S_N} \eta(\hat{\imath}) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}, \xi)} + \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi), \tag{2.104}$$

where $B > 0$ is to be determined later in this proof. In (2.104) we use now (I4) and the fact that f is a density with respect to ν_N to write

$$\begin{aligned} & \int_{S_N} \left(\frac{1}{N^p} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \eta(\hat{\imath}) \partial_{e_q} G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right) f(\eta, \xi) d\nu_N(\eta, \xi) - o_N(1) \\ &\leq \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \frac{B}{2} \int_{S_N} \eta(\hat{\imath}) \left[\sqrt{f(\eta^{\hat{\imath}, \hat{\imath}+e_q}, \xi)} - \sqrt{f(\eta, \xi)} \right]^2 d\nu_N(\eta, \xi) + \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \frac{2}{B} \left(G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right)^2 \\ &\leq \frac{2B}{dN^{p-1}} \mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) + \frac{2}{BN^{p-1}} \sum_{\hat{\imath} \in \Lambda_N} \left(G_n(s, \frac{\hat{\imath}}{N}) \right)^2, \tag{2.105} \end{aligned}$$

where we used (D1) to provide (2.105). By gathering (2.100), (2.102) and (2.105), we obtain

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right] \\
 & \leq \int_0^T \sup_{\substack{f \text{ density} \\ \text{with respect} \\ \text{to } \nu_N}} \left\{ \frac{2B}{dN^{p-1}} \mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) + \frac{1}{aN^p} \langle \mathcal{L}_N \sqrt{f}, \sqrt{f} \rangle_{\nu_N} \right\} ds \\
 & \quad + \int_0^T \left(\frac{2}{BN^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N} \left(G_n(s, \frac{\hat{i}}{N}) \right)^2 - \frac{1}{2} \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) ds + \frac{C_0}{a} + o_N(1) \\
 & \leq \int_0^T \sup_{\substack{f \text{ density} \\ \text{with respect} \\ \text{to } \nu_N}} \left\{ \left[\frac{2B}{dN^{p-1}} - \frac{1}{aN^{p-2}} \right] \mathbb{D}_N^{\text{field}}(\sqrt{f}, \nu_N) \right\} ds \tag{2.106} \\
 & \quad + \int_0^T \left(\frac{2}{BN^{p-1}} \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N} \left(G_n(s, \frac{\hat{i}}{N}) \right)^2 - \frac{1}{2} \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) ds + \frac{C_0 + c(b)\alpha}{a} + o_N(1),
 \end{aligned}$$

where we used Lemma 2.13 to provide the last inequality. At this point, we make the choice $B := dN/2a$ to cancel the supremum in (2.106), so that we are left with

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right] \\
 & \leq \int_0^T \left(\frac{2a}{dN^p} \sum_{\hat{i} \in \Lambda_N} \left(G_n(s, \frac{\hat{i}}{N}) \right)^2 - \frac{1}{2} \|G_n(s)\|_{L^2(\Lambda)}^2 \right) ds + \frac{C_0 + c(b)\alpha}{a} + o_N(1). \tag{2.107}
 \end{aligned}$$

We take now $a := d/4$ to face the norm with the Riemann sum in (2.107), this results in

$$\mathbb{E}_N^{\mu_N} \left[\max_{0 \leq n \leq n_0} \left\{ \int_0^T J_{G_n}^N(s) ds \right\} \right] \leq \frac{4C_0 + 4c(b)\alpha}{d} + o_N(1).$$

It remains to let $N \rightarrow \infty$ to eventually reach (2.98) with $C := (4C_0 + 4c(b)\alpha)/d$. This completes the proof. \square

Table of Notations

Notation	Description
p	Dimension of the field (the road is $(p - 1)$ -dimensional)
\mathbb{T}	One-dimensional torus \mathbb{R}/\mathbb{Z}
\mathbb{T}^{p-1}	Macroscopic road
Λ	Macroscopic field $\mathbb{T}^{p-1} \times (0, 1)$
$\bar{\Lambda}$	Closure of Λ
Γ	Macroscopic frontier of the field $\partial\Lambda = \mathbb{T}^{p-1} \times \{0, 1\}$
Γ^{up}	Macroscopic upper boundary of the field
Γ^{low}	Macroscopic lower boundary of the field
N	Size of the microscopic particle system
\mathbb{T}_N	One-dimensional discrete torus $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$
\mathbb{T}_N^{p-1}	Microscopic road
Λ_N	Microscopic field $\mathbb{T}_N \times \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$
Γ_N	Microscopic frontier of the field $\partial\Lambda_N = \mathbb{T}_N \times \{0, 1\}$
Γ_N^{up}	Microscopic upper boundary of the field
Γ_N^{low}	Microscopic lower boundary of the field
$\hat{i} = (i, j)$	Microscopic point on Λ_N ($i \in \mathbb{T}_N$ and $j \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$)
$\hat{k} = (k, \ell)$	Alternative microscopic point on Λ_N if needed
$\hat{x} = (x, y)$	Macroscopic point on Λ ($x \in \mathbb{T}$ and $y \in (0, 1)$)
$\hat{z} = (z, \omega)$	Alternative macroscopic point on Λ if needed
e_q	q^{th} canonical vector of \mathbb{R}^p ($1 \leq q \leq p$)
(η, ξ)	State of the system (η for the field and ξ for the road)
S_N^{field}	State space for the field $\{0, 1\}^{\Lambda_N} \ni \eta$
S_N^{road}	State space for the road $\{0, 1\}^{\Gamma_N^{\text{low}}} \ni \xi$
S_N	Whole state space $S_N^{\text{field}} \times S_N^{\text{road}}$
$\pi_N^{\text{field}}(\eta)$	Empirical measure on S_N^{field} associated with η
$\pi_N^{\text{road}}(\xi)$	Empirical measure on S_N^{road} associated with ξ
$\pi_N(\eta, \xi)$	Empirical measure on S_N associated with (η, ξ)
$\mathcal{M}^{\text{field}}$	Set of positive measures on S_N^{field} bounded by 1

$\mathcal{M}^{\text{road}}$	Set of positive measures on S_N^{road} bounded by 1
\mathcal{M}	Cartesian product $\mathcal{M}^{\text{field}} \times \mathcal{M}^{\text{road}}$
T	Time horizon
d, D	Diffusion coefficients
α	Exchange coefficient
b	Birth rate at the upper boundary
γ	Parameter of the Bernoulli product measures
$\mathbb{P}_N^{\mu_N}$	Probability measure on S_N induced by μ_N and $(\eta_t, \xi_t)_{t \in [0, T]}$
$\mathbb{Q}_N^{\mu_N}$	Probability measure on \mathcal{M} induced by $\mathbb{P}_N^{\mu_N}$ and π_N
\mathbb{Q}_∞	A point in the closure of $(\mathbb{Q}_N^{\mu_N})_{N \geq 2}$
\mathbb{E}_N^\bullet	Expectation with respect to \mathbb{P}_N^\bullet
$\mathbb{E}_N^{\mu_N}$	Expectation with respect to $\mathbb{P}_N^{\mu_N}$
$\mathbb{E}_N^{\nu_N}$	Expectation with respect to $\mathbb{P}_N^{\nu_N}$
\mathbb{E}_∞	Expectation with respect to \mathbb{Q}_∞
Δ	Laplacian operator for the field
Δ_x	Laplacian operator for the road
Δ_x^N	Discrete Laplacian operator for the road
∂_{yy}^N	Discrete Laplacian operator in the y -direction
∇	Gradient operator for the field
∇_x	Gradient operator for the road
Tr	Trace operator
G	Test functions for the field
H	Test functions for the road
$\mathbb{L}_N^{\text{field}}$	Bulk field part of the generator
$\mathbb{L}_N^{\text{road}}$	Bulk road part of the generator
L_N^{Rob}	Robin exchange part of the generator
L_N^{reac}	Reaction exchange part of the generator
L_N^{up}	Upper reservoir part of the generator
\mathcal{D}_N	Dirichlet form
$\mathbb{D}_N^{\text{field}}$	Bulk field part of the Dirichlet form
$\mathbb{D}_N^{\text{road}}$	Bulk road part of the Dirichlet form
D_N^{Rob}	Robin exchange part of the Dirichlet form

2.A. Appendix

D_N^{reac}	Reaction exchange part of the Dirichlet form
D_N^{up}	Upper reservoir part of the Dirichlet form
$\mathcal{H}(\mu \nu)$	Relative entropy of μ with respect to ν
$\mathcal{M}_N(t)$	The Martingale
$\mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}}(t)$	Field part of the Martingale $\mathcal{M}_N(t)$
$\mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}(t)$	Road part of the Martingale $\mathcal{M}_N(t)$
$\mathcal{N}_{N,G}^{\text{field}}(t)$	Quadratic variation of $\mathcal{M}_{N,G}^{\text{field}}(t)$
$\mathcal{N}_{N,H}^{\text{road}}(t)$	Quadratic variation of $\mathcal{M}_{N,H}^{\text{road}}(t)$
$\mathcal{B}_{N,G}^{\text{field}}(t)$	“B”-part of the martingale $\mathcal{N}_{N,G}^{\text{field}}(t)$
$\mathcal{B}_{N,H}^{\text{road}}(t)$	“B”-part of the martingale $\mathcal{N}_{N,H}^{\text{road}}(t)$
\mathcal{S}	Set of measures whose densities satisfy (W1) and (W2)
\mathcal{S}_{W1}	Set of measures whose densities satisfy (W1)
\mathcal{S}_{W2}	Set of measures whose densities satisfy (W2)
$\mathcal{W}_{u,v}(t)$	Functional of the weak formulation $\mathcal{W}_{u,v} = \mathcal{W}_{v,G}^{\text{field}} + \mathcal{W}_{u,H}^{\text{road}}$
$\mathcal{W}_{v,G}^{\text{field}}(t)$	Functional of the weak formulation in the field
$\mathcal{W}_{u,H}^{\text{road}}(t)$	Functional of the weak formulation on the road
$\mathbb{U}_\varepsilon^{\text{up}}$	Upper unit approximation
$\mathbb{U}_\varepsilon^{\text{low}}$	Upper unit approximation

CHAPTER 3

The Field-Road Diffusion Model: Fundamental Solution and Asymptotic Behavior

In this chapter, we consider the *linear* field-road system, a model for *fast diffusion channels* in population dynamics and ecology. This system takes the form of a system of PDEs set on domains of different dimensions, with exchange boundary conditions. Despite the intricate geometry of the problem, we provide an explicit expression for its fundamental solution and for the solution to the associated Cauchy problem. The main tool is a Fourier (on the road variable)/Laplace (on time) transform. In addition, we derive estimates for the decay rate of the L^∞ norm of these solutions.

This Chapter corresponds to a work written with [Matthieu Alfaro](#) and [Romain Ducasse](#), published [6] in Journal of Differential Equations.

Sommaire du chapitre

3.1	Introduction	130
3.2	Main results	131
3.3	The Heat equation in the half-space	135
3.4	The solution to the field-road model Cauchy problem	140
3.5	The decay rate of the field-road model	145
3.6	Numerical explorations	152
3.A	Appendix	156

3.1 Introduction

In this chapter we consider the solutions $(v = v(t, x, y), u = u(t, x))$ to the *linear* field-road model

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \mu u - \nu v|_{y=0}, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u + \nu v|_{y=0} - \mu u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Here $N \geq 2$ and d, D, μ and ν are positive constants. This system is actually the linear (purely diffusive) part of the *field-road* model, introduced by Berestycki, Roquejoffre and Rossi [22] to describe the spread of invasive species in presence of networks with fast propagation. We review the original system later in this section.

Let us mention that phenomena of spatial spread are highly relevant to the understanding of biological invasions, spreads of emergent diseases, as well as spatial shifts in distributions in the context of climate change. There is a wide literature dedicated to these topics, let us refer for instance to [112], [113] and the reference therein for more details. In the recent years, there has been a growing recognition of the importance of *fast diffusion channels* on biological propagations: for instance, an accidental transportation via human activities of some individuals towards northern and eastern France may be the cause of accelerated propagation of the pine processionary moth [125]. Also, in Canada, some GPS data revealed that wolves travel faster along seismic lines (i.e. narrow strips cleared for energy exploration), thus increasing their chances to meet a prey [109]. It is also acknowledged that fast diffusion channels (roads, airlines, etc.) play a central role in the propagation of epidemics. As is well known, the spread of the black plague, which killed about a third of the European population in the 14th century, was favoured by the trade routes, especially the Silk Road, see [130]. More recently, some evidences of the the radiation of the COVID epidemic along highways and transportation infrastructures were found [81].

In order to capture the phenomena induced by such fast diffusion channels, the so-called field-road reaction diffusion system

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v + f(v), & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \mu u - \nu v|_{y=0}, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u + \nu v|_{y=0} - \mu u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

was proposed by Berestycki, Roquejoffre and Rossi [22]. The mathematical problem then amounts to describing survival and propagation in a non-standard physical space: the geographical domain consists in the half-space (the “field”) $x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0$, bordered by the hyperplane (the “road”) $x \in \mathbb{R}^{N-1}, y = 0$. In the field, individuals diffuse with coefficient $d > 0$ and their density is given by $v = v(t, x, y)$. In particular Δv has to be understood as $\Delta_x v + \partial_{yy} v$. On the road, individuals typically diffuse faster ($D > d$)

and their density is given by $u = u(t, x)$. In particular Δu has to be understood as $\Delta_x u$. The exchanges of population between the road and the field are described by the second equation in system (3.2), where $\mu > 0$ and $\nu > 0$. These Robin type boundary conditions link the field and the road equations and, in some sense, are the core of the model.

In a series of works [22], [21], [24], [23], Berestycki, Roquejoffre and Rossi studied the field-road system with $N = 2$ and f a Fisher-KPP nonlinearity. They shed light on an *acceleration phenomenon*: when $D > 2d$, the road enhances the global diffusion and the spreading speed exceeds the standard Fisher-KPP invasion speed. Since then, many generalizations or related problems have been studied. Field-road models with (periodic) heterogeneities are considered in [83], [147], [2]. Situations where the field is not a half-space but a more general domain are studied in [138], [128], [60], [30]. The setting where the Laplace operators are replaced with non-local operators, accounting for more complex diffusion processes, is tackled in [18], [17]. The papers [19], [20] consider the interaction between fast-diffusion networks and ecological phenomena such as climate change. In [115], [116], [117], the author introduces *long range exchanges* so that the road may catch individuals from anywhere in the field and *vice versa*.

Despite these results on (3.2) and its variations, it turned out that the *linear* field-road system — obtained by letting $f \equiv 0$ in (3.2) — was not fully understood: there were no complete expressions for the fundamental solution, and the decay rate of the L^∞ norm of the solutions to (3.1) as $t \rightarrow +\infty$ was not known.

In the present chapter, we thus consider (3.1) as a starting point and intend at filling this gap. It turns out that we can reach an explicit expression for both the fundamental solution and the solution to the associated Cauchy problem. To do so, we perform a “Fourier in x /Laplace in t ” transform, which seems to be the good way to understand the intricate exchange boundary conditions. These explicit expressions enable, in particular, to provide a sharp (possibly up to a logarithmic term) decay rate of the L^∞ norm of the solution.

Such a linear rate estimate is a key stone information to tackle difficult nonlinear issues. For instance, it is expected, see [78] or [8], that such a decay rate determines the so-called *Fujita exponent* p_F for the system (3.2) when $f(v) = v^{1+p}$: this exponent separates “systematic blow-up” (when $0 < p \leq p_F$) from “possible extinction” (when $p > p_F$). Also, understanding the Fujita blow-up phenomena when $f(v) = v^{1+p}$ typically enables, see [3], to solve the issue of “extinction *vs.* propagation” in the population dynamics model (3.2) with $f(v) = v^{1+p}(1 - v)$. Such a nonlinearity serves a model for the so-called *Allee effect* [10], roughly meaning that the *per capita* growth rate of the population is not maximal at small density. We plan to address such issues in a future work.

3.2 Main results

Let $N \geq 2$ be an integer. A generic point $X \in \mathbb{R}^N$ will be written $X = (x, y)$ with $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ and $y \in \mathbb{R}$. For the “variable of integration”, we reserve the notation $Z = (z, \omega) \in \mathbb{R}^N$,

with $z \in \mathbb{R}^{N-1}$ and $\omega \in \mathbb{R}$. For the “ x -Fourier variable”, we use the notation $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$, while, for the “ t -Laplace variable”, we reserve the notation $s > 0$, see Appendix 3.A.3. We denote the upper half-space (the “field”) $\mathbb{R}_+^N := \mathbb{R}^{N-1} \times (0, +\infty)$, its boundary being the hyperplane (the “road”) $\partial\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

For given $\mu, \nu > 0$ and $D > d > 0$ (we refer to Remark 3.5 for the case $D \leq d$), we thus consider the linear field-road problem (3.1) supplemented with the initial datum

$$\begin{cases} v|_{t=0} = v_0, & X \in \mathbb{R}_+^N, & v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N), \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^{N-1}, & u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}). \end{cases} \quad (3.3)$$

Our first main contribution is to provide an explicit expression of the solution to this Cauchy problem.

Theorem 3.1 (Solution to the *linear* field-road Cauchy problem) *Assume $D > d$. Then the unique bounded solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.3) is*

$$\begin{aligned} v(t, X) = & V(t, X) + \frac{\mu}{\sqrt{d}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(t, z, y) u_0(x - z) dz \\ & + \frac{\mu\nu}{\sqrt{d}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(s, z, y) V|_{y=0}(t - s, x - z) dz ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$u(t, x) = e^{-\mu t} U(t, x) + \nu \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_R^D(t - s, x - z) v|_{y=0}(s, z) dz ds, \quad (3.5)$$

where

- $V = V(t, X)$ is the solution to the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t V = d\Delta V, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \\ \nu V|_{y=0} - d\partial_y V|_{y=0} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ V|_{t=0} = v_0, & x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

- $U = U(t, x)$ is the solution to the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t U = D\Delta U, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ U|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (3.7)$$

- $G_R^D = G_R^D(t, x)$ denotes the $(N - 1)$ -dimensional Heat kernel with diffusion D , that is

$$G_R^D(t, x) := \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N-1}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4Dt}}, \quad (3.8)$$

3.2. Main results

- and $\Lambda = \Lambda(t, x, y)$ is defined as

$$\Lambda(t, x, y) := \frac{e^{-\frac{y^2}{4dt}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[a\alpha\Phi_\alpha + b\beta\Phi_\beta + c\gamma\Phi_\gamma \right] (t, \xi, y) e^{-dt\|\xi\|^2 + i\xi \cdot x} d\xi, \quad (3.9)$$

with $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)(\xi)$ being the three complex roots of the δ -indexed polynomials

$$P_\delta(\sigma) := \sigma^3 + \frac{\nu}{\sqrt{d}} \sigma^2 + (\mu + \delta) \sigma + \frac{\nu \delta}{\sqrt{d}}, \quad \text{with } \delta := (D - d)\|\xi\|^2, \quad (3.10)$$

$(a, b, c) = (a, b, c)(\xi)$ being given by

$$a := \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad b := \frac{1}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, \quad c := \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \quad (3.11)$$

and for $\bullet \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

$$\Phi_\bullet(t, \xi, y) := \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2 \bullet \sqrt{d} t + y}{2\sqrt{dt}} \right), \quad (3.12)$$

where $\Gamma(\ell) := e^{-\ell^2}$, and *Erfc* is the complementary error function, whose definition is recalled in Appendix 3.A.1.

Let us give some remarks on Theorem 3.1. First, the theorem gives the unique *bounded* solution. Indeed, there could be *non-physical* solutions that change sign and grow very fast at infinity: this fact was proved for the Heat equation by Tychonoff [140], see also [132] (Chapter 9). To get rid of such solutions, and so, to ask uniqueness, one needs to impose very loose restriction on the growth at infinity; here we choose boundedness for the sake of simplicity.

Next, the Cauchy problem (3.7) is nothing else than the Heat equation in the hyperplane \mathbb{R}^{N-1} and both the expression and the decay rate of its solution $U = U(t, x)$ are very well-known. On the other hand, the Cauchy problem (3.6) is the Heat equation in the half-space \mathbb{R}_+^N with Robin boundary conditions, and the understanding of its solution $V = V(t, X)$ is an important preliminary, that we recall in Section 3.3.

Last, but not least, the “migration-kernel” $\Lambda = \Lambda(t, x, y)$ is the keystone to write the solution to the field-road diffusion model. Its main role is to describe the in-flux of individuals *in* the field *from* the road via the last two terms of v in (3.4), whose form evokes a Duhamel’s formula. We may give a physical sense to Λ by remarking that it is the “ v -component” of the solution to (3.1) starting from $(v_0, u_0) \equiv (0, \frac{\sqrt{d}}{\mu} \delta_{x=0})$. Notice also that, having in mind the acceleration phenomenon [22], [21] when $D > 2d$, Λ is the only term in the expression of v that involves the constant D . However, the expression of $\Lambda(t, x, y)$ is quite intricate. As a consequence of our Fourier/Laplace transform approach, it involves an integral over $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$. Furthermore, we show in Appendix 3.A.2 that, for

almost all $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$, the three complex roots $\alpha = \alpha(\xi)$, $\beta = \beta(\xi)$ and $\gamma = \gamma(\xi)$ of the polynomials P_δ are distinct, which allows to define $a = a(\xi)$, $b = b(\xi)$ and $c = c(\xi)$ in (3.11). Further details will appear in Section 3.4 and 3.5 and in Appendix 3.A.2.

Our second main contribution is to estimate the decay rate of the solution to the linear field-road system (3.1) starting from the datum, say

$$\begin{cases} v|_{t=0} = v_0, & X \in \mathbb{R}_+^N, & v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N) \text{ is nonnegative, and compactly supported,} \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^{N-1}, & u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1}) \text{ is nonnegative, and compactly supported.} \end{cases} \quad (3.13)$$

In the statement below, the notation $B \lesssim B'$ means there is a constant $k = k(N, d, D, \nu, \mu) > 0$ such that $B \leq kB'$.

Theorem 3.2 (Decay rate of the solutions to the *linear* field-road system) *Assume $D > d$ and let (v, u) be the bounded solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13). Then*

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{C_{v_0} \ln(1+t) + C_{v_0}^{u_0}}{(1+t)^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0, \quad (3.14)$$

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \lesssim \frac{C_{v_0} \ln(1+t) + C_{v_0}^{u_0}}{(1+t)^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0, \quad (3.15)$$

for some nonnegative constant C_{v_0} depending only on v_0 , and some nonnegative constant $C_{v_0}^{u_0}$ depending on both v_0 and u_0 .

The starting point to prove this upper estimate is the explicit expression of v and u given in Theorem 3.1. The main difficulty is to control the “migration-kernel” Λ defined in (3.9) — (3.12) which, as explained above, is the core of the field-road model. To do so, we shall rely on a rather technical result, namely Lemma 3.7, whose proof needs a full understanding of the δ -indexed polynomials P_δ in (3.10), achieved in Appendix 3.A.2. Let us emphasize that the expression of Λ we own, namely (3.9) — (3.12), is highly conditioned by the fact that, at some point, we use a decomposition into partial fractions to match up with known forms of Laplace-transforms. This decomposition makes appear the artefacts a , b and c which blow up as the roots of P_δ collide for singular values of δ , see (3.11). Fortunately, due to the compensating structure of $a\alpha\Phi_\alpha + b\beta\Phi_\beta + c\gamma\Phi_\gamma$ and as confirmed by the technical Lemma 3.7, these singularities are “artificial”.

By following the proof in Section 3.5, one can track the values of C_{v_0} and $C_{v_0}^{u_0}$ and check, in particular, that $v_0 \equiv 0$ implies $C_{v_0} = 0$. As a result, if there is initially no individual in the field, the estimate of the decay rate becomes of the magnitude $\mathcal{O}((1+t)^{-N/2})$, which corresponds to the decay rate of the Heat equation in the half space \mathbb{R}_+^N with Neumann boundary conditions — see Theorem 3.3. This is consistent with the fact that the boundary conditions of the field-road model are of the exchange type so that, roughly speaking, individuals are “not lost” but “stored” in the road. On the other hand, if $v_0 \not\equiv 0$,

our estimate of the decay rate becomes of the magnitude $\mathcal{O}((1+t)^{-N/2} \ln(1+t))$, which is very slightly “less good”. We believe that the actual decay rate is always of the magnitude $\mathcal{O}((1+t)^{-N/2})$: to deal with the terms $P(t, x, y)$ and $Q(t, x, y)$ appearing in (3.41), we rely on the uniform estimate (3.44) of the rather intricate function $\Phi(t, \xi, y)$ appearing in Lemma 3.7. The use of this uniform estimate is the cause of the logarithmic term appearing later, but refined estimates seem delicate to reach. Notice however that, in order to study the Fujita blow-up phenomenon, the logarithmic term should only play a (bad) role in the so-called *critical case*.

The organization of the present chapter is as follows. In Section 3.3, we recall some facts about the fundamental solution of the Heat equation in a half-space, that will prove useful in the sequel. In particular, we give a complete derivation of the expression of the fundamental solution in the case of Robin boundary conditions, thus introducing the strategy of proof we will employ to study the complete system (3.1) in Section 3.4, where we compute the explicit form of the solutions of the linear field-road system, while their decay rate is estimated in Section 3.5. Last, in Section 3.6, we present some numerical simulations which not only “validate” Theorem 3.2 but also explore some open problems related to the level sets of the solution, or to the sign of the *flux* of individuals from the road to the field.

3.3 The Heat equation in the half-space

As an important preliminary, we discuss in this section the Heat equation in the half-space, in particular the explicit expression and the decay rate of the L^∞ norm of the solution to the associated Cauchy problem with different boundary conditions. These facts are very classical for the Neumann and Dirichlet boundary conditions, but the details for the case of Robin boundary conditions are not so easy to find. We therefore take this opportunity to present the main arguments, by using a Fourier/Laplace transform strategy, which we use again in the next section to deal with the whole field-road system (3.1).

Let $N \geq 1$ be an integer. We recall that a generic point $X \in \mathbb{R}^N$ will be written $X = (x, y)$ with $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ and $y \in \mathbb{R}$. For the “variable of integration”, we reserve the notation $Z = (z, \omega) \in \mathbb{R}^N$, with $z \in \mathbb{R}^{N-1}$ and $\omega \in \mathbb{R}$. For $d > 0$, we denote the N -dimensional Heat kernel with diffusion d ,

$$G(t, X) := \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|X\|^2}{4dt}} = \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2 + y^2}{4dt}}, \quad (3.16)$$

and finally, we denote the upper half-space $\mathbb{R}_+^N := \mathbb{R}^{N-1} \times (0, +\infty)$, its boundary being the hyperplane $\partial\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

For $0 \leq \theta \leq 1$, we thus consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v, & t > 0, X \in \mathbb{R}_+^N, \\ \theta v + (1 - \theta)d\partial_n v = 0, & t > 0, X \in \partial\mathbb{R}_+^N, \\ v|_{t=0} = v_0, & X \in \mathbb{R}_+^N, \end{cases} \quad (3.17)$$

where, say, $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}_+^N)$. Here $n := (0_{\mathbb{R}^{N-1}}, -1)$ and the boundary condition may be recast

$$\theta v - (1 - \theta)d\partial_y v = 0, \quad t > 0, X \in \partial\mathbb{R}_+^N.$$

In this section, the notation $B \lesssim B'$ means there is a constant $k = k(N, d, \theta) > 0$ such that $B \leq kB'$.

Theorem 3.3 (Heat equation in the half-space) *The solution to the Cauchy problem (3.17) is*

$$v(t, X) = \int_{\mathbb{R}_+^N} H_\theta(t, X, Z) v_0(Z) dZ, \quad (3.18)$$

for some $H_\theta(t, X, Z)$ precised below.

(i) When $\theta = 0$ (Neumann case), we have

$$H_0(t, X, Z) = G(t, x - z, y - \omega) + G(t, x - z, y + \omega),$$

and

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} |v_0(Z)| dZ}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0.$$

(ii) When $\theta = 1$ (Dirichlet case), we have

$$H_1(t, X, Z) = G(t, x - z, y - \omega) - G(t, x - z, y + \omega),$$

and

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} \omega |v_0(Z)| dZ}{t^{\frac{N+1}{2}}}, \quad \forall t > 0.$$

3.3. The Heat equation in the half-space

(iii) When $0 < \theta < 1$ (Robin case), we have

$$H_\theta(t, X, Z) = H_0(t, X, Z) - 2\sqrt{\pi} A\sqrt{dt} G(t, x - z, y + \omega) \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{2Adt + y + \omega}{2\sqrt{dt}} \right), \quad (3.19)$$

$$= H_1(t, X, Z) + 2G(t, x - z, y + \omega) \left(1 - \sqrt{\pi} A\sqrt{dt} \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{2Adt + y + \omega}{2\sqrt{dt}} \right) \right), \quad (3.20)$$

where

$$A := \frac{\theta}{d(1 - \theta)},$$

$\Gamma(\ell) := e^{-\ell^2}$, and the definition of Erfc is recalled in Appendix 3.A.1. Furthermore,

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} (1 + \omega) |v_0(Z)| dZ}{t^{\frac{N+1}{2}}}, \quad \forall t > 0, \quad (3.21)$$

and

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{C_{v_0}^\#}{(1+t)^{\frac{N+1}{2}}}, \quad \forall t > 0, \quad (3.22)$$

$$\text{where } C_{v_0}^\# := \left(\|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{2}{N+1}} + \left(\int_{\mathbb{R}_+^N} (1 + \omega) |v_0(Z)| dZ \right)^{\frac{2}{N+1}} \right)^{\frac{N+1}{2}}.$$

This theorem is rather classical, in particular points (i) and (ii). A possible way to prove it is to use some continuation arguments. For instance, to prove (i), one defines $\tilde{v}(t, X)$ as the solution of the Heat equation in the whole of \mathbb{R}^N arising from the initial datum

$$\tilde{v}_0(x, y) := \begin{cases} v_0(x, y) & \text{if } y > 0, \\ v_0(x, -y) & \text{if } y < 0. \end{cases}$$

Then, by uniqueness of the (bounded) solutions of the Heat equation, \tilde{v} remains even with respect to y , is \mathcal{C}^∞ in $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ by usual regularity results on parabolic equations. Thus it satisfies $\partial_y \tilde{v}(t, x, 0) = 0$ for all $t > 0$ and all $x \in \mathbb{R}^{N-1}$. Hence, $v(t, x, y)$ stands as the restriction of $\tilde{v}(t, x, y)$ to the upper-half-space, and we have

$$\begin{aligned} v(t, X) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(t, X - Z) \tilde{v}_0(Z) dZ \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} \left[G(t, x - z, y - \omega) + G(t, x - z, y + \omega) \right] v_0(z, \omega) dZ, \end{aligned}$$

from which we deduce the expression of H_0 and the decay rate. The point (ii) can be proven in the same way by considering this time, for \tilde{v}_0 , the odd-continuation (with respect to y) of v_0 . A more tricky (and less known) continuation argument can be used to reach the

point (iii). However, in view of the sequel, let us present now the detailed proof of (iii) using rather a Fourier/Laplace transform strategy.

In the following, the x -Fourier transform of u shall be denoted by \widehat{u} , the t -Laplace one by \widehat{u} and the x -Fourier/ t -Laplace one by \widehat{u} . We refer to Appendix 3.A.3 for conventions and notations related to these transforms.

Proof of Theorem 3.3, (iii). Applying the t -Laplace transform to the first equation in (3.17), namely $\partial_t v(t, x, y) = d(\Delta_x + \partial_{yy})v(t, x, y)$, yields the elliptic PDE

$$d(\Delta_x \widehat{v}(s, x, y) + \partial_{yy} \widehat{v}(s, x, y)) - s\widehat{v}(s, x, y) = -v_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^N,$$

where $s > 0$ acts as a parameter. Then by applying the x -Fourier transform, we reach the linear second order ODE

$$d\partial_{yy} \widehat{v}(s, \xi, y) - (s + d\|\xi\|^2) \widehat{v}(s, \xi, y) = -\widehat{v}_0(\xi, y), \quad y > 0, \quad (3.23)$$

where $s > 0$ and $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$ act as parameters. Setting $\sigma := \sqrt{s + d\|\xi\|^2}$, solutions of (3.23) may be written

$$\begin{aligned} \widehat{v}(s, \xi, y) = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y} & \left(C_1 - \frac{1}{2\sqrt{d}\sigma} \int_0^y e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\omega} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega \right) \\ & + e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y} \left(C_2 + \frac{1}{2\sqrt{d}\sigma} \int_0^y e^{\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\omega} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega \right), \end{aligned}$$

where C_1 and C_2 are constants (with respect to y) to be determined. In order to insure $\lim_{y \rightarrow +\infty} \widehat{v}(s, \xi, y) = 0$, one needs

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{d}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\omega} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega. \quad (3.24)$$

Next, since

$$\widehat{v}(s, \xi, 0) = C_1 + C_2 \quad \text{and} \quad \partial_y \widehat{v}(s, \xi, 0) = \frac{\sigma}{\sqrt{d}}(C_1 - C_2),$$

the Robin boundary conditions enforce

$$C_2 = \left(1 - \frac{2A\sqrt{d}}{\sigma + A\sqrt{d}} \right) C_1. \quad (3.25)$$

This brings us to the following *explicit* expression for \widehat{v} :

$$\widehat{v}(s, \xi, y) = \frac{1}{2\sqrt{d}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}|y-\omega|}}{\sigma} + \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}(y+\omega)}}{\sigma} - 2A\sqrt{d} \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}(y+\omega)}}{\sigma(\sigma + A\sqrt{d})} \right) \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega,$$

3.3. The Heat equation in the half-space

where we recognize known forms of t -Laplace transforms evaluated at $\sigma^2 = s + d\|\xi\|^2$ — see Lemma 3.13, (iii) and (iv) — so that

$$\begin{aligned} \widehat{v}(s, \xi, y) &= \frac{1}{2\sqrt{d}} \int_0^{+\infty} \mathcal{L} \left[t \mapsto \frac{e^{-\frac{(y-\omega)^2}{4dt}}}{\sqrt{\pi t}} + \frac{e^{-\frac{(y+\omega)^2}{4dt}}}{\sqrt{\pi t}} \right. \\ &\quad \left. - 2A\sqrt{d} \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{2Adt + y + \omega}{2\sqrt{dt}} \right) e^{-\frac{(y+\omega)^2}{4dt}} \right] (s + d\|\xi\|^2) \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega. \end{aligned}$$

Using Lemma 3.14 (iv), we can now get rid of the t -Laplace transform and get

$$\begin{aligned} \widehat{v}(t, \xi, y) &= \frac{1}{2\sqrt{d}} \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-\frac{(y-\omega)^2}{4dt}}}{\sqrt{\pi t}} + \frac{e^{-\frac{(y+\omega)^2}{4dt}}}{\sqrt{\pi t}} \left(1 - 2\sqrt{\pi} A\sqrt{dt} \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{2Adt + y + \omega}{2\sqrt{dt}} \right) \right) \right] \\ &\quad e^{-dt\|\xi\|^2} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega. \end{aligned}$$

Finally, note that

$$e^{-dt\|\xi\|^2} \widehat{v}_0(\xi, \omega) = \mathcal{F} \left[\frac{e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{4dt}}}{(4\pi dt)^{\frac{N-1}{2}}} \right] (\xi) \times \mathcal{F} [v_0(\cdot, \omega)] (\xi) = \mathcal{F} \left[\frac{e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{4dt}}}{(4\pi dt)^{\frac{N-1}{2}}} * v_0(\cdot, \omega) \right] (\xi),$$

whence we can also get rid of the x -Fourier transform and reach

$$\begin{aligned} v(t, x, y) &= \int_{\mathbb{R}_+^N} \left[\frac{e^{-\frac{\|x-z\|^2}{4dt}}}{(4\pi dt)^{\frac{N-1}{2}}} \left(\frac{e^{-\frac{(y-\omega)^2}{4dt}}}{\sqrt{4\pi dt}} + \frac{e^{-\frac{(y+\omega)^2}{4dt}}}{\sqrt{4\pi dt}} \left(1 - 2\sqrt{\pi} A\sqrt{dt} \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{2Adt + y + \omega}{2\sqrt{dt}} \right) \right) \right) \right] \\ &\quad v_0(Z) dZ. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Expressions (3.19) and (3.20) of H_θ are immediately deduced from (3.26).

We now turn to the decay rate. It is readily seen that

$$-\sqrt{\pi} \frac{\text{Erfc}}{\Gamma}(\ell) \leq -\frac{1}{1+\ell}, \quad \forall \ell \geq 0.$$

As a consequence, for all $t > 0$, all $y \geq 0$, and all $\omega \geq 0$,

$$-\sqrt{\pi} \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{2Adt + y + \omega}{2\sqrt{dt}} \right) \leq -\frac{2\sqrt{dt}}{2Adt + 2\sqrt{dt} + y + \omega}.$$

Using this into (3.20), we see that, for all $t > 0$, all $X \in \mathbb{R}_+^N$, and all $Z \in \mathbb{R}_+^N$,

$$\begin{aligned} 0 < H_\theta(t, X, Z) - H_1(t, X, Z) &\leq 2G(t, x - z, y + \omega) \frac{2\sqrt{dt} + y + \omega}{2Adt + 2\sqrt{dt} + y + \omega} \\ &\lesssim \frac{m(t)}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad (3.27) \end{aligned}$$

where

$$m(t) := \sup_{r \geq 0} \left(\frac{2\sqrt{dt} + r}{2Adt + 2\sqrt{dt} + r} e^{-\frac{r^2}{4dt}} \right).$$

An elementary analysis shows that

$$m(t) = \max_{0 \leq r \leq \sqrt{dt}} \left(\frac{2\sqrt{dt} + r}{2Adt + 2\sqrt{dt} + r} e^{-\frac{r^2}{4dt}} \right) \leq \max_{0 \leq r \leq \sqrt{dt}} \left(\frac{2\sqrt{dt} + r}{2Adt + 2\sqrt{dt} + r} \right) \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

From this, (3.27), and the case (ii), we obtain the decay rate as stated in (3.21). Combining (3.21) and the fact that $\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)}$, one can check that (3.22) holds true. \square

Let us conclude this section with the following direct consequence of Theorem 3.3.

Corollary 3.4 *For any $0 \leq \theta \leq 1$, we have*

$$H_\theta(t, X, Z) = \frac{e^{-\frac{\|x-z\|^2}{4dt}}}{(4\pi dt)^{\frac{N-1}{2}}} \times H_\theta^{(1)}(t, y, \omega),$$

where $H_\theta^{(1)}$ denotes H_θ for $N = 1$.

3.4 The solution to the field-road model Cauchy problem

In this section, we explicitly obtain the bounded solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.3). Before starting, we recall that the x -Fourier transform of u is denoted by \hat{u} , the t -Laplace one by \hat{u} and the x -Fourier/ t -Laplace one by \hat{u} . We refer to Appendix 3.A.3 for conventions and notations related to these transforms.

Proof of Theorem 3.1. We start with establishing expression (3.5) for $u = u(t, x)$ which is the simplest to get. To do so, we apply the t -Laplace and then the x -Fourier transforms to the third equation in (3.1), namely $\partial_t u(t, x) = D\Delta_x u(t, x) + \nu v|_{y=0}(t, x) - \mu u(t, x)$. This yields the algebraic relation

$$-D\|\xi\|^2 \hat{u}(s, \xi) + \nu \hat{v}|_{y=0}(s, \xi) - \mu \hat{u}(s, \xi) = -\hat{u}_0(\xi) + s \hat{u}(s, \xi), \quad s > 0, \xi \in \mathbb{R}^{N-1},$$

which is recast

$$\hat{u}(s, \xi) = \frac{\hat{u}_0(\xi) + \nu \hat{v}|_{y=0}(s, \xi)}{\mu + s + D\|\xi\|^2}, \quad s > 0, \xi \in \mathbb{R}^{N-1}. \quad (3.28)$$

3.4. The solution to the field-road model Cauchy problem

It is now possible to reach (3.5) from (3.28) by using properties and known forms of t -Laplace and x -Fourier transforms — see Lemmas 3.13, (i) and (ii), and 3.14, (ii) and (iii):

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(s, \xi) &= \mathcal{L} \left[t \mapsto e^{-(\mu+D\|\xi\|^2)t} \widehat{u}_0(\xi) \right] (s) + \nu \mathcal{L} \left[t \mapsto e^{-(\mu+D\|\xi\|^2)t} \right] (s) \times \mathcal{L} \left[t \mapsto \widehat{v}|_{y=0}(t, \xi) \right] (s) \\
&= \mathcal{L} \left[t \mapsto e^{-(\mu+D\|\xi\|^2)t} \widehat{u}_0(\xi) \right] (s) + \nu \mathcal{L} \left[t \mapsto \int_0^t e^{-(\mu+D\|\xi\|^2)(t-\tau)} \widehat{v}|_{y=0}(\tau, \xi) d\tau \right] (s) \\
&= \mathcal{LF} \left[(t, x) \mapsto e^{-\mu t} [u_0 * G_R^D(t, \cdot)](x) \right] (s, \xi) \\
&\quad + \nu \mathcal{LF} \left[(t, x) \mapsto \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} [v|_{y=0}(\tau, \cdot) * G_R^D(t-\tau, \cdot)](x) d\tau \right] (s, \xi) \\
&= \mathcal{LF} \left[(t, x) \mapsto e^{-\mu t} \left(U(t, x) + \nu \int_0^t e^{\mu\tau} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_R^D(t-\tau, x-z) v|_{y=0}(\tau, z) dz d\tau \right) \right] (s, \xi)
\end{aligned}$$

which provides (3.5).

We now turn to the expression (3.4) for $v = v(t, X)$. For convenience let us set

$$\sigma := \sqrt{s + d\|\xi\|^2} \quad \text{and} \quad \Sigma := \sqrt{s + D\|\xi\|^2}. \quad (3.29)$$

As in Section 3.3, applying t -Laplace then x -Fourier transforms on the first equation in (3.1), namely $\partial_t v(t, x, y) = d(\Delta_x + \partial_{yy})v(t, x, y)$, leads to the linear second order ODE (where $s > 0$ and $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$ serve as parameters)

$$d\partial_{yy}\widehat{v}(s, \xi, y) - (s + d\|\xi\|^2)\widehat{v}(s, \xi, y) = -\widehat{v}_0(\xi, y), \quad y > 0, \quad (3.30)$$

whose solutions are

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(s, \xi, y) &= e^{\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y} \left(C_1 - \frac{1}{2\sqrt{d}\sigma} \int_0^y e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\omega} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega \right) \\
&\quad + e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y} \left(C_2 + \frac{1}{2\sqrt{d}\sigma} \int_0^y e^{\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\omega} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega \right),
\end{aligned}$$

where C_1 and C_2 are constants (with respect to y) to be determined. In order to insure $\lim_{y \rightarrow +\infty} \widehat{v}(s, \xi, y) = 0$, one needs

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{d}\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}\omega} \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega. \quad (3.31)$$

Then, calling $A := \frac{\nu}{d}$ and $B := \frac{\mu}{d}$, the exchange condition — second equation in (3.1) — is recast $Av|_{y=0}(t, x) - \partial_y v|_{y=0}(t, x) = Bu(t, x)$; and since

$$\widehat{v}(s, \xi, 0) = C_1 + C_2 \quad \text{and} \quad \partial_y \widehat{v}(s, \xi, 0) = \frac{\sigma}{\sqrt{d}}(C_1 - C_2),$$

the exchange condition enforces

$$\begin{aligned} C_2 &= \left(1 - \frac{2A\sqrt{d}}{\sigma + A\sqrt{d}}\right) C_1 + \frac{B\sqrt{d}}{\sigma + A\sqrt{d}} \hat{u}(s, \xi) \\ &= \left(1 - \frac{2A\sqrt{d}}{\sigma + A\sqrt{d}}\right) C_1 + B\sqrt{d} \frac{\hat{u}_0(\xi) + \nu \hat{v}|_{y=0}(s, \xi)}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d})}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

where we used the expression (3.28) for $\hat{u}(s, \xi)$ and the definition of Σ in (3.29). Comparing (3.24), (3.25) with (3.31), (3.32), we see that the “deviation” of $\hat{v}(s, \xi, y)$ (of the field-road model) from the solution to the Heat equation in the half-space (see Section 3.3) stands in the second term in the right-hand side of (3.32). Hence, using the computations that have been performed in Section 3.3 and calling $V = V(t, X)$ the solution to (3.6), we reach an *implicit* expression for $\hat{v}(s, \xi, y)$, namely

$$\hat{v}(s, \xi, y) = \hat{V}(s, \xi, y) + B\sqrt{d} e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y} \frac{\hat{u}_0(\xi) + \nu \hat{v}|_{y=0}(s, \xi)}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d})}. \quad (3.33)$$

Evaluating now (3.33) at $y = 0$ yields

$$\hat{v}|_{y=0}(s, \xi) = \hat{V}|_{y=0}(s, \xi) + B\sqrt{d} \frac{\hat{u}_0(\xi) + \nu \hat{v}|_{y=0}(s, \xi)}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d})},$$

whence

$$\begin{aligned} \hat{v}|_{y=0}(s, \xi) &= \frac{B\sqrt{d}}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d}) - \nu B\sqrt{d}} \hat{u}_0(\xi) \\ &\quad + \frac{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d})}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d}) - \nu B\sqrt{d}} \hat{V}|_{y=0}(s, \xi). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Plugging (3.34) into (3.33) now yields the *explicit* expression

$$\hat{v}(s, \xi, y) = \hat{V}(s, \xi, y) + B\sqrt{d} \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y}}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d}) - \nu B\sqrt{d}} \left[\hat{u}_0(\xi) + \nu \hat{V}|_{y=0}(s, \xi) \right]. \quad (3.35)$$

Our task is now to take the inverse Fourier/Laplace transform of the second term in the above right-hand-side. Letting

$$\delta := (D - d)\|\xi\|^2,$$

one has $\Sigma^2 = \sigma^2 + \delta$. Then define

$$\hat{\Lambda}(s, \xi, y) := \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y}}{(\Sigma^2 + \mu)(\sigma + A\sqrt{d}) - \nu B\sqrt{d}} = \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y}}{\sigma^3 + A\sqrt{d}\sigma^2 + (\mu + \delta)\sigma + A\sqrt{d}\delta}. \quad (3.36)$$

3.4. The solution to the field-road model Cauchy problem

To match up $\widehat{\Lambda}(s, \xi, y)$ with known t -Laplace transforms, we need to expand (3.36) into partial fractions, which requires a study of the polynomials

$$P_\delta(\sigma) := \sigma^3 + A\sqrt{d}\sigma^2 + (\mu + \delta)\sigma + A\sqrt{d}\delta, \quad \delta \geq 0 \text{ (since } D > d\text{)}.$$

We show in Appendix 3.A.2 that the three complex roots $\alpha(\delta), \beta(\delta), \gamma(\delta)$ of P_δ are simple for almost all $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$. Hence, for these ξ ,

$$\widehat{\Lambda}(s, \xi, y) = a \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y}}{\sigma - \alpha} + b \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y}}{\sigma - \beta} + c \frac{e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{d}}y}}{\sigma - \gamma}, \quad (3.37)$$

where a, b and c have been defined in (3.11), and do not depend on the s variable. Expression (3.37) of $\widehat{\Lambda}$ shows up a known form of t -Laplace transform — see Lemma 3.13, (v) — evaluated at $\sigma^2 = s + d\|\xi\|^2$, namely

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}(s, \xi, y) = \mathcal{L} \left[t \mapsto e^{-\frac{y^2}{4dt}} \left(\frac{a+b+c}{\sqrt{\pi t}} + a\alpha \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\alpha\sqrt{d}t+y}{2\sqrt{dt}} \right) + b\beta \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\beta\sqrt{d}t+y}{2\sqrt{dt}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + c\gamma \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\gamma\sqrt{d}t+y}{2\sqrt{dt}} \right) \right) \right] (s + d\|\xi\|^2). \end{aligned}$$

Observing that $a+b+c=0$, using Lemma 3.14, (iv), and recalling the notation Φ_\bullet defined in statement of Theorem 3.1, see (3.12), we thus reach

$$\widehat{\Lambda}(s, \xi, y) = \mathcal{L} \left[t \mapsto e^{-\frac{y^2}{4dt}} \left[a\alpha\Phi_\alpha + b\beta\Phi_\beta + c\gamma\Phi_\gamma \right] (t, \xi, y) e^{-dt\|\xi\|^2} \right] (s). \quad (3.38)$$

We know from Lemma 3.13, (i), that $e^{-dt\|\xi\|^2} = \mathcal{F}[G_R^d(t, \cdot)](\xi)$ — notice that here we do mean G_R^d , and not G_R^D , see (3.8). Denoting

$$\Phi := a\alpha\Phi_\alpha + b\beta\Phi_\beta + c\gamma\Phi_\gamma,$$

we also know — see Lemma 3.14, (i) — that $\Phi(t, \xi, y) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \mathcal{F}[\mathcal{F}[\Phi(t, -\cdot, y)]](\xi)$. Hence, from Lemma 3.14, (ii), we end up with

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}(s, \xi, y) &= \mathcal{L}\mathcal{F} \left[(t, x) \mapsto \frac{e^{-\frac{y^2}{4dt}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\eta \in \mathbb{R}^{N-1}} \int_{\chi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(t, \chi, y) G_R^d(t, x - \eta) e^{i\chi \cdot \eta} d\chi d\eta \right] (s, \xi) \\ &= \mathcal{L}\mathcal{F} \left[(t, x) \mapsto \frac{e^{-\frac{y^2}{4dt}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\chi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(t, \chi, y) e^{i\chi \cdot x} \int_{\eta \in \mathbb{R}^{N-1}} G_R^d(t, x - \eta) e^{-i\chi \cdot (x - \eta)} d\eta d\chi \right] (s, \xi) \\ &= \mathcal{L}\mathcal{F} \left[(t, x) \mapsto \frac{e^{-\frac{y^2}{4dt}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\chi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(t, \chi, y) e^{-dt\|\chi\|^2 + i\chi \cdot x} d\chi \right] (s, \xi). \quad (3.39) \end{aligned}$$

In other words, and as expected, we do have

$$\widehat{\Lambda}(s, \xi, y) = \mathcal{LF} \left[(t, x) \mapsto \Lambda(t, x, y) \right] (s, \xi),$$

where $\Lambda = \Lambda(t, x, y)$ has been introduced in the statement of Theorem 3.1, see (3.9). Finally, our last move consists in using Lemma 3.14, (ii) and (iii), in (3.35), leading us, knowing Λ , to

$$\begin{aligned} \widehat{v}(s, \xi, y) = \mathcal{LF} \left[(t, x) \mapsto V(t, x, y) + B\sqrt{d} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(t, z, y) u_0(x - z) dz \right. \\ \left. + \nu B\sqrt{d} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(\tau, z, y) V|_{y=0}(t - \tau, x - z) dz d\tau \right] (s, \xi) \end{aligned}$$

which provides (3.4). □

Remark 3.5 (When $D \leq d$) *Let us first discuss the case $D < d$. Then, when ξ browses \mathbb{R}^{N-1} , $\delta = (D - d)\|\xi\|^2$ browses $(-\infty, 0]$. As in Appendix 3.A.2, it can be shown that, for almost all $\delta \leq 0$ (and thus for almost all $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$), the roots of P_δ are simple. We thus can write again (3.37) and the above proof readily applies.*

We now turn on the critical case $D = d$. When ξ browses \mathbb{R}^{N-1} , $\delta = (D - d)\|\xi\|^2$ remains stuck at zero — so that $\Phi(t, \xi, y)$ is actually independent on ξ — and only the polynomial P_0 plays a role. If $\mu \neq \frac{\nu^2}{4d}$, then P_0 has three simple roots (see Figure 53 and Appendix 3.A.2) and the above proof again readily applies. On the other hand, if $\mu = \frac{\nu^2}{4d}$, then P_0 has a simple root and a double root. In this case, one should go back to (3.36) and, rather than (3.37), use the adequate expansion into partial fractions. Details are omitted.

Remark 3.6 (Adding linear growth) *One may also want to consider the case with linear growth both in the field and on the road. If, in the purely diffusive system (3.1), $+pv$ and $+qu$ are added to the v -equation and the u -equation respectively, then by considering $(\tilde{v}(t, x), \tilde{u}(t, x)) := e^{-qt}(v(t, x), u(t, x))$, the system is recast (after dropping the tildes and defining $r := p - q$)*

$$\begin{cases} \partial_t v = d\Delta v + rv, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, y > 0, \\ -d\partial_y v|_{y=0} = \mu u - \nu v|_{y=0}, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t u = D\Delta u + \nu v|_{y=0} - \mu u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases}$$

which is the linearized system around the null steady state of the Fisher-KPP system (3.2) originally introduced in [22], [21]. Then the first change in the proof is that (3.30) is transferred into

$$d\partial_{yy}\widehat{v}(s, \xi, y) - (s + d\|\xi\|^2 - r)\widehat{v}(s, \xi, y) = -\widehat{v}_0(\xi, y), \quad y > 0. \quad (3.40)$$

3.5. The decay rate of the field-road model

Since individuals are expected to better grow in the field than on the road, we would typically have $r > 0$ and, because of that, the structure of the solutions to the linear second order ODE (3.40) does depend upon parameters s and r , and different cases should be considered. As a result our method readily applies but, to reach a rather explicit expression of the solution possibly yielding new insights, further heavy computations would be necessary.

3.5 The decay rate of the field-road model

In this section, we estimate the decay rate of the L^∞ norm of the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13). Owing to the parabolic comparison principle, we can assume without loss of generality that v_0 and u_0 are smooth.

Proof of Theorem 3.2. We first handle the case of v — from which the one of u shall easily ensue. Reminding the expression (3.4) of v ,

$$v(t, X) = V(t, X) + \overbrace{\frac{\mu}{\sqrt{d}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(t, z, y) u_0(x - z) dz}^{\text{Let us call this } P(t, x, y),} + \frac{\mu \nu}{\sqrt{d}} \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Lambda(s, z, y) V|_{y=0}(t - s, x - z) dz ds}_{\text{and that } Q(t, x, y).} \quad (3.41)$$

The first term, namely $V(t, X)$, is the solution to the Cauchy problem (3.6) whose L^∞ control is given in statement of Theorem 3.3 (iii):

$$\|V(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{\int_{\mathbb{R}_+^N} (1 + \omega) |v_0(Z)| dZ}{t^{\frac{N+1}{2}}}, \quad \forall t > 0. \quad (3.42)$$

To deal with terms P and Q , we will need the following lemma, whose proof is postponed at the end of this section.

Lemma 3.7 (L^∞ control of Φ) *Recall the notation introduced in the proof of Theorem 3.1:*

$$\Phi(t, \xi, y) := \left[a\alpha\Phi_\alpha + b\beta\Phi_\beta + c\gamma\Phi_\gamma \right](t, \xi, y). \quad (3.43)$$

Then

$$\mathcal{S}(t) := \sup_{y \geq 0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} |\Phi(t, \xi, y)| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \quad \forall t > 0. \quad (3.44)$$

From here, the estimate of P is straight. Indeed, using expression (3.9) of Λ as written

in Theorem 3.1, we get

$$\begin{aligned}
 |P(t, x, y)| &= \left| \int_{z \in \mathbb{R}^{N-1}} \frac{e^{-\frac{y^2}{4dt}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(t, \xi, y) e^{-dt\|\xi\|^2 + i\xi \cdot z} u_0(x - z) d\xi dz \right| \\
 &\leq \frac{\mathcal{S}(t)}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} e^{-dt\|\xi\|^2} d\xi \int_{z \in \mathbb{R}^{N-1}} |u_0(z)| dz \\
 &= \frac{\mathcal{S}(t)}{(4\pi dt)^{\frac{N-1}{2}}} \int_{z \in \mathbb{R}^{N-1}} |u_0(z)| dz.
 \end{aligned}$$

Whence, thanks to Lemma 3.7,

$$\|P(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \frac{\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u_0(z)| dz}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0. \quad (3.45)$$

Controlling Q is more refined. Observe from Theorem 3.3 and Corollary 3.4 that

$$V(t, x, y) = \int_{\eta \in \mathbb{R}^{N-1}} \int_{\omega=0}^{\infty} G_R^d(t, x - \eta) H_\theta^{(1)}(t, y, \omega) v_0(\eta, \omega) d\omega d\eta,$$

where $\theta := \frac{\nu}{1+\nu} \in (0, 1)$, so that

$$\begin{aligned}
 Q(t, x, y) &= \int_{s=0}^t \int_{z \in \mathbb{R}^{N-1}} \frac{e^{-\frac{y^2}{4ds}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(s, \xi, y) e^{-ds\|\xi\|^2 + i\xi \cdot z} \\
 &\quad \int_{\eta \in \mathbb{R}^{N-1}} \int_{\omega=0}^{\infty} G_R^d(t - s, x - z - \eta) H_\theta^{(1)}(t - s, 0, \omega) v_0(\eta, \omega) d\omega d\eta d\xi dz ds \\
 &= \int_{s=0}^t \frac{e^{-\frac{y^2}{4ds}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(s, \xi, y) e^{-ds\|\xi\|^2} \int_{\eta \in \mathbb{R}^{N-1}} \int_{\omega=0}^{\infty} H_\theta^{(1)}(t - s, 0, \omega) v_0(\eta, \omega) \\
 &\quad \int_{z \in \mathbb{R}^{N-1}} G_R^d(t - s, x - z - \eta) e^{i\xi \cdot z} dz d\omega d\eta d\xi ds.
 \end{aligned}$$

The integral in z is nothing else than $\mathcal{F}[G_R^d(t - s, \cdot + x - \eta)](\xi) = e^{-d(t-s)\|\xi\|^2 + i\xi \cdot (x - \eta)}$ so that

$$\begin{aligned}
 Q(t, x, y) &= \int_{s=0}^t \frac{e^{-\frac{y^2}{4ds}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(s, \xi, y) e^{-dt\|\xi\|^2} \int_{\eta \in \mathbb{R}^{N-1}} \int_{\omega=0}^{\infty} H_\theta^{(1)}(t - s, 0, \omega) v_0(\eta, \omega) \\
 &\quad e^{i\xi \cdot (x - \eta)} d\omega d\eta d\xi ds \\
 &= \int_{s=0}^t \frac{e^{-\frac{y^2}{4ds}}}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} \Phi(s, \xi, y) e^{-dt\|\xi\|^2} e^{i\xi \cdot x} \int_{\omega=0}^{\infty} H_\theta^{(1)}(t - s, 0, \omega) \widehat{v}_0(\xi, \omega) d\omega d\xi ds.
 \end{aligned}$$

As a result,

$$|Q(t, x, y)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{s=0}^t \mathcal{S}(s) \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} e^{-dt\|\xi\|^2} \int_{\omega=0}^{\infty} H_\theta^{(1)}(t - s, 0, \omega) |\widehat{v}_0(\xi, \omega)| d\omega d\xi ds.$$

3.5. The decay rate of the field-road model

From the control on \mathcal{S} in Lemma 3.7 and estimate (3.22) in Theorem 3.3 (with $N = 1$), we reach

$$|Q(t, x, y)| \lesssim \tilde{C}_{v_0} \int_{s=0}^t \int_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} e^{-dt\|\xi\|^2} \frac{1}{\sqrt{1+s}(1+t-s)} d\xi ds \lesssim \frac{\tilde{C}_{v_0}}{t^{\frac{N-1}{2}}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+s}(1+t-s)} ds,$$

for some $\tilde{C}_{v_0} \geq 0$. Finally, an elementary computation shows

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+s}(1+t-s)} ds = \frac{1}{\sqrt{2+t}} \left[\ln \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{1+t}{2+t}}}{1 - \sqrt{\frac{1+t}{2+t}}} \right) - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2+t}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2+t}}} \right) \right] \leq \frac{\ln(4t+6)}{\sqrt{2+t}},$$

from which there comes

$$\|Q(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \lesssim \tilde{C}_{v_0} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{N}{2}}}, \quad \forall t > 0. \quad (3.46)$$

Gathering (3.42), (3.45) and (3.46) brings us to the announced control (3.14) on v .

Let us now turn to u . We recall its expression as written in (3.5):

$$u(t, x) = e^{-\mu t} U(t, x) + \nu \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G_R^D(t-s, x-z) v|_{y=0}(s, z) dz ds,$$

where $U = U(t, x)$ denotes the well-known solution to the Cauchy problem (3.7). Hence, thanks the control (3.14) we just established on v ,

$$|u(t, x)| \lesssim \frac{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} e^{-\mu t}}{t^{\frac{N-1}{2}}} + C_{v_0} e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} \frac{\ln(1+s)}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} ds + C_{v_0}^u e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} \frac{1}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} ds. \quad (3.47)$$

We now treat the two temporal convolutions in (3.47). To do so, remark that

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{\mu s}}{\mu} \frac{\ln(1+s)}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} \right) = e^{\mu s} \frac{\ln(1+s)}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} + \frac{e^{\mu s}}{\mu} \frac{1 - \frac{N}{2} \ln(1+s)}{(1+s)^{\frac{N+2}{2}}} \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} e^{\mu s} \frac{\ln(1+s)}{(1+s)^{\frac{N}{2}}}$$

yields $\int_0^t e^{\mu s} \frac{\ln(1+s)}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} ds \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\mu t}}{\mu} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)^{\frac{N}{2}}}$. Similarly,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{\mu s}}{\mu} \frac{1}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} \right) = e^{\mu s} \frac{1}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} - \frac{e^{\mu s}}{\mu} \frac{\frac{N}{2}}{(1+s)^{\frac{N+2}{2}}} \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} e^{\mu s} \frac{1}{(1+s)^{\frac{N}{2}}}$$

yields $\int_0^t e^{\mu s} \frac{1}{(1+s)^{\frac{N}{2}}} ds \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\mu t}}{\mu} \frac{1}{(1+t)^{\frac{N}{2}}}$. Therefore,

$$|u(t, x)| \lesssim \frac{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} e^{-\mu t}}{t^{\frac{N-1}{2}}} + \frac{C_{v_0} \ln(1+t)}{(1+t)^{\frac{N}{2}}} + \frac{C_{v_0}^u}{(1+t)^{\frac{N}{2}}},$$

which provides the control (3.15) on u up to changing the value of $C_{v_0}^u$ if necessary. \square

It now remains to prove Lemma 3.7.

Proof of Lemma 3.7. The proof is related to the study of the δ -indexed polynomials P_δ in Appendix 3.A.2. As $\delta = (D - d)\|\xi\|^2$ browses \mathbb{R}_+ , the polynomials P_δ may provide double or triple roots for, at most, two values of δ — see Lemmas 3.9 to 3.12 (i). In Lemmas 3.9 to 3.12 we build a closed set \mathcal{E} of \mathbb{R}_+ so that, for $\delta \in \mathcal{E}$, the roots α, β, γ remain away from each other and so that each connected component of \mathcal{E}^c contains *one and only one* δ_i ($i = 0, 1$ or 2) which provides a multiple root λ_i . This proof is divided into three steps:

(i) We treat the cases where $\delta \in \mathcal{E}$ for which, thanks to the boundedness of a, b and c , we can consider $a\alpha\Phi_\alpha, b\beta\Phi_\beta$ and $c\gamma\Phi_\gamma$ independently.

We deal then with the situations where $\delta \in \mathcal{E}^c$. In those, because a, b and c may be unbounded we must consider $a\alpha\Phi_\alpha, b\beta\Phi_\beta$ and $c\gamma\Phi_\gamma$ together. Let $\delta \in \mathcal{E}^c$, then there is $i \in \{0, 1, 2\}$ such that $\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)$ — recall that $\delta = \delta_i$ provides the multiple root λ_i and that η is defined in Lemmas 3.10 to 3.12.

(ii) We treat the cases where the root λ_i is double.

(iii) We treat the cases where the root λ_i is triple.

Before starting, we emphasize that (3.65) insures $\Re(\alpha), \Re(\beta), \Re(\gamma) \leq 0$ which allows us to use the estimates (3.64) at point $z = \frac{-2\bullet\sqrt{dt}+y}{2\sqrt{dt}}$ for \bullet in the convex hull of α, β and γ . Notice that, in the sequel, we shall often write Φ_\bullet for $\Phi_\bullet(t, \xi, y)$.

Step (i). Because $\inf_{\delta \in \mathcal{E}} (|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|) > \varepsilon$, we have

$$\sup_{\delta \in \mathcal{E}} (|a|, |b|, |c|) < \frac{1}{\varepsilon^2}. \quad (3.48)$$

Next, using (3.64), we have, for $\lambda \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

$$|\lambda\Phi_\lambda| = |\lambda| \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\lambda\sqrt{dt} + y}{2\sqrt{dt}} \right) \lesssim \frac{2|\lambda|\sqrt{dt}}{|-2\lambda\sqrt{dt} + y|} \leq \frac{1}{\sqrt{t}},$$

the last inequality coming from $\Re(\lambda) \leq 0$ and $y \geq 0$. Gathering the latter inequality with (3.48) provides, in view of (3.43),

$$\sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in \mathcal{E}} |\Phi(t, \xi, y)| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}} \quad \text{for all } t \geq 1. \quad (3.49)$$

We now turn to the case where $0 < t \leq 1$ (still when $\delta \in \mathcal{E}$). Let $\delta_\infty > 0$ be defined as in Lemma 3.8. It is readily seen that

$$\sup_{t \in (0,1]} \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in \mathcal{E} \cap [0, \delta_\infty]} |\Phi(t, \xi, y)| < +\infty. \quad (3.50)$$

3.5. The decay rate of the field-road model

Next let us consider $\delta \geq \delta_\infty$. Since $\gamma = \bar{\beta}$, $c = \bar{b}$, $\Phi_\gamma = \bar{\Phi}_\beta$, we deduce from (3.43) that

$$|\Phi| \leq |a\alpha\Phi_\alpha| + 2|b\beta\Phi_\beta|. \quad (3.51)$$

The first term in the above right-hand-side is clearly bounded while, for the second,

$$|b\beta\Phi_\beta| = \frac{|\beta||\Phi_\beta|}{|\beta - \alpha||\beta - \gamma|} \leq \frac{|\Phi_\beta|}{|\beta - \alpha|} \leq \frac{|\Phi_\beta|}{\varepsilon} < +\infty.$$

Hence

$$\sup_{t \in (0,1]} \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in \mathcal{E} \cap [\delta_\infty, +\infty)} |\Phi(t, \xi, y)| < +\infty. \quad (3.52)$$

From (3.50) and (3.52), we deduce that (3.49) actually holds true for all $t > 0$, and we are done with this case.

Step (ii). Without loss of generality, we may, to fix ideas, suppose that $\delta \rightarrow \delta_i$ ($i = 1$ or 2) provides the merging of the simple roots α and β into the double root λ_i — see Lemmas 3.11 and 3.12. Recall in that case that

$$\inf_{\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)} \inf_{\lambda \in [\alpha, \beta]} (|\lambda|, |\lambda - \gamma|) > \varepsilon,$$

for some $\eta > 0$. Then, for $\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)$ and $\lambda \in [\alpha, \beta]$, one sets

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda(t, \xi, y) := \frac{\lambda(\Phi_\lambda - \Phi_\gamma)}{\lambda - \gamma},$$

and we claim that

$$\sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\psi'_\lambda| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \quad \forall t > 0, \quad (3.53)$$

where ψ'_λ denotes $(\partial_\bullet \psi_\bullet)_\lambda(t, \xi, y)$. Using $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ we get

$$\begin{aligned} |\Phi| &= |a\alpha(\Phi_\alpha - \Phi_\gamma) + b\beta(\Phi_\beta - \Phi_\gamma)| \\ &= \frac{|\psi_\alpha - \psi_\beta|}{|\alpha - \beta|} \\ &\leq \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\psi'_\lambda| \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \end{aligned}$$

where we used the mean value inequality to provide third line.

It thus only remains to prove the claim (3.53). We have

$$\psi'_\lambda = \frac{\lambda\Phi'_\lambda}{\lambda - \gamma} - \frac{\gamma\Phi_\lambda}{(\lambda - \gamma)^2} + \frac{\gamma\Phi_\gamma}{(\lambda - \gamma)^2},$$

where Φ'_λ denotes $(\partial_\bullet \Phi_\bullet)_\lambda(t, \xi, y)$. It is at first clear that

$$\sup_{t \in (0,1]} \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\psi'_\lambda| < +\infty. \quad (3.54)$$

Next, using control (3.64), we have, for $\lambda \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} |\Phi'_\lambda| &= \sqrt{t} \left| \left(\frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \right)' \left(\frac{-2\lambda\sqrt{d}t + y}{2\sqrt{dt}} \right) \right| \lesssim \sqrt{t} \frac{4dt}{|-2\lambda\sqrt{d}t + y|^2} \leq \frac{1}{|\lambda|^2\sqrt{t}}, \\ |\Phi_\lambda| &= \left| \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\lambda\sqrt{d}t + y}{2\sqrt{dt}} \right) \right| \lesssim \frac{2\sqrt{dt}}{|-2\lambda\sqrt{d}t + y|} \leq \frac{1}{|\lambda|\sqrt{t}}, \\ |\gamma\Phi_\gamma| &= |\gamma| \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{-2\gamma\sqrt{d}t + y}{2\sqrt{dt}} \right) \lesssim \frac{|\gamma|2\sqrt{dt}}{|-2\gamma\sqrt{d}t + y|} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

and so, because $|\lambda| > \varepsilon$ — see Lemmas 3.11 and 3.12, (iii) —, one gets, for all $t \geq 1$,

$$\sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_i - \eta, \delta_i + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\psi'_\lambda| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}. \quad (3.55)$$

Gathering (3.54) and (3.55) finally gives (3.53) for all $t > 0$ and we are done with this case.

Step (iii). We recall in this last case that $\delta \rightarrow \delta_0$ provokes the merging of the three simple roots α, β, γ into the triple root $\lambda_0 = -\frac{A\sqrt{d}}{3}$. Without loss of generality it may be assumed that α is the real root, and taking ε_R and ε_I as defined in Lemma 3.10, (ii), we have

$$\alpha = \lambda_0 - 2\varepsilon_R, \quad \beta = \lambda_0 + \varepsilon_R + i\varepsilon_I, \quad \gamma = \lambda_0 + \varepsilon_R - i\varepsilon_I.$$

Using again $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ yields

$$\begin{aligned} \Phi &= b\beta(\Phi_\beta - \Phi_\alpha) + c\gamma(\Phi_\gamma - \Phi_\alpha) \\ &= \frac{\beta}{\beta - \gamma} \frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \frac{\Phi_\gamma - \Phi_\alpha}{\gamma - \alpha} \\ &= \frac{\beta}{\beta - \gamma} \frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\gamma}{\beta - \gamma} \overline{\left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right)} \\ &= \Re \left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right) + i \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} \Im \left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right) \\ &= \Re \left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right) + \frac{\lambda_0 + \varepsilon_R}{\varepsilon_I} \Im \left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

The main issue is now to control second term in (3.56) because one has to compensate the term ε_I which vanishes as $\delta \rightarrow \delta_0$. To do so, we use a Taylor-Lagrange expansion of Φ_\bullet at $\bullet = \alpha$ which provides, for some $\lambda \in [\alpha, \beta]$,

$$\Phi_\beta = \Phi_\alpha + (\beta - \alpha)\Phi'_\alpha + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2}\Phi''_\lambda,$$

3.5. The decay rate of the field-road model

where Φ'_α denotes $(\partial_\bullet \Phi_\bullet)_\alpha$, and Φ''_λ denotes $(\partial_{\bullet\bullet} \Phi_\bullet)_\lambda$. Hence, one gets

$$\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} = \Phi'_\alpha + \frac{3\varepsilon_R + i\varepsilon_I}{2} \Phi''_\lambda.$$

Now, because α is real,

$$\Im \left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right) = \frac{3\varepsilon_R}{2} \Im(\Phi''_\lambda) + \frac{\varepsilon_I}{2} \Re(\Phi''_\lambda),$$

and therefore, using that $\varepsilon_R \stackrel{\delta \rightarrow \delta_0}{=} \mathcal{O}(\varepsilon_I)$,

$$|\Im \left(\frac{\Phi_\beta - \Phi_\alpha}{\beta - \alpha} \right)| \leq \left(\frac{3}{2} |\varepsilon_R| + \frac{1}{2} |\varepsilon_I| \right) |\Phi''_\lambda| \lesssim |\varepsilon_I \Phi''_\lambda|.$$

As a consequence, by using the mean value inequality to control the first term in (3.56), one gets

$$|\Phi| \lesssim \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)} \sup_{\ell \in [\alpha, \beta]} |\Phi'_\ell| + \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\lambda_0 + \varepsilon_R| |\Phi''_\lambda|.$$

It is first clear that

$$\sup_{t \in (0, 1]} \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)} \sup_{\ell \in [\alpha, \beta]} |\Phi'_\ell| < +\infty, \quad (3.57)$$

and

$$\sup_{t \in (0, 1]} \sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\Phi''_\lambda| < +\infty. \quad (3.58)$$

Now, using control (3.64), we have, for ℓ and $\lambda \in [\alpha, \beta]$,

$$|\Phi'_\ell| = \sqrt{t} \left| \left(\frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \right)' \left(\frac{-2\ell\sqrt{d}t + y}{2\sqrt{dt}} \right) \right| \lesssim \sqrt{t} \frac{4dt}{|-2\ell\sqrt{d}t + y|^2} \leq \frac{1}{|\ell|^2 \sqrt{t}},$$

$$|\Phi''_\lambda| = t \left| \left(\frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \right)'' \left(\frac{-2\lambda\sqrt{d}t + y}{2\sqrt{dt}} \right) \right| \lesssim t \frac{8(dt)^{\frac{3}{2}}}{|-2\lambda\sqrt{d}t + y|^3} \leq \frac{1}{|\lambda|^3 \sqrt{t}},$$

and thus, because $|\ell|$ and $|\lambda| > \varepsilon$ — see Lemma 3.10, (iv) —, one gets, for all $t \geq 1$,

$$\sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)} \sup_{\ell \in [\alpha, \beta]} |\Phi'_\ell| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}, \quad (3.59)$$

$$\sup_{y \geq 0} \sup_{\delta \in (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)} \sup_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\Phi''_\lambda| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}. \quad (3.60)$$

Gathering (3.57), (3.58), (3.59) and (3.60) finally provides $|\Phi| \lesssim \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ for all $t > 0$, and we are done with this case which concludes the proof of the lemma. \square

3.6 Numerical explorations

Through this section, we assume $N = 2$, meaning that the road is a line and we perform some numerical simulations of the Cauchy problem (3.1)–(3.13). To do so, we truncate the unbounded domain $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ and work on a bounded box $(-2M, 2M) \times (0, M)$, where $M > 0$. To preserve the quantity of individuals, we impose the no-flux boundary conditions through the artificial frontiers. The resolution method is based on a classical finite difference scheme. Since we consider $M \gg 1$ and an initial datum (v_0, u_0) supported in a “relatively small” compact compared to the size of the box, we are confident that the numerical solution should be close to the real solution.

On the decay rate. When $D > d$, the asymptotic decay rate of the L^∞ norm of the solution (v, u) is expected to be of the magnitude $\mathcal{O}((1+t)^{-1})$, see Theorem 3.2 and the discussion on the logarithmic term right after. This is numerically confirmed by the left panel of Figure 44.

On the other hand, when $D \leq d$ (which is not the essence of the field-road model), one should, based on Remark 3.5, redo the lengthy computations of Section 3.5 to capture the asymptotic decay rate. We are rather confident that this should not alter the result, and this is sustained by numerical simulations, see the right panel of Figure 44.

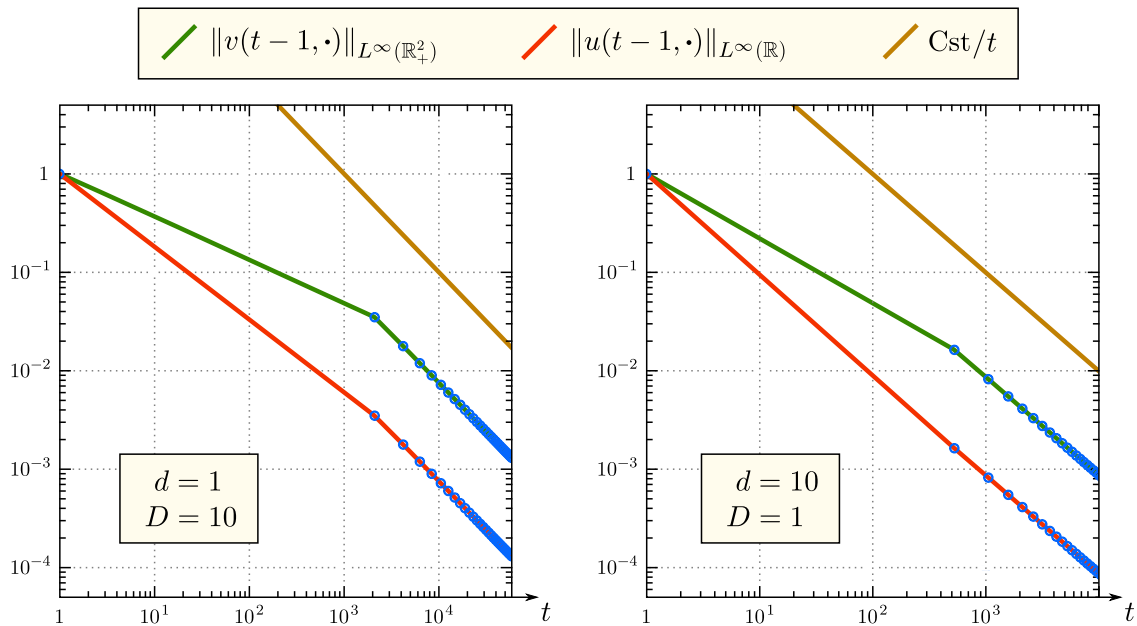


Figure 44 — Decay in log-scale of the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 800$, $\mu = 10$ and $\nu = 1$, arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbb{1}_{[-10,10] \times [10,30]}, \mathbb{1}_{[-10,10]})$.

On the level sets. We now turn to numerically explore the form of the level sets of the solution (v, u) . The results are presented in Figure 45.

3.6. Numerical explorations

In particular on the bottom panel of Figure 45, corresponding to a situation where $D = 100$ and $d = 1$, we observe the following. There holds

$$-\partial_y v|_{y=0}(t = 1000, \cdot) < 0 \quad \text{in the “middle of the road”,}$$

meaning that the individuals mainly switch *from* the field *to* the road. On the other hand, there holds

$$-\partial_y v|_{y=0}(t = 1000, \cdot) > 0 \quad \text{“far away” on the road,}$$

meaning that the individuals mainly switch *from* the road *to* the field. Roughly speaking, the road sucks up individuals in the central region (corresponding to the bulk of the population) and spits them out in the far away region (corresponding to the tails of the population).

On the other hand, on the top panel of Figure 45, corresponding to a situation where $D = 0.1$ and $d = 1$, there holds $-\partial_y v|_{y=0}(t = 1000, \cdot) \approx 0$ (since the level sets of v are almost perpendicular to the road), meaning that there are very few exchanges between the field and the road. This can be observed with further accuracy in Figure 48.

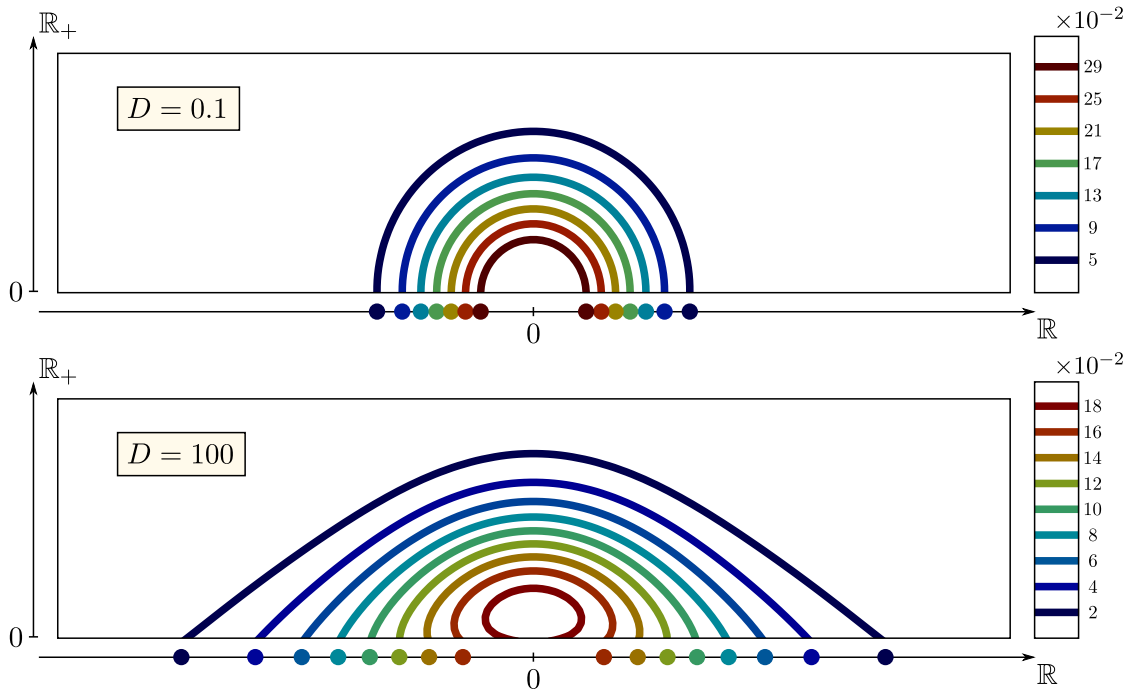


Figure 45 — Two snapshots at time $t = 1000$ of a few level sets of the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 200$, $d = \mu = \nu = 1$ and two different values for D , arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbb{1}_{[-5,5] \times [0,5]}, 0)$.

On the flux. In view of the above considerations, we are now interested in

$$F(t, x) := \mu u(t, x) - \nu v|_{y=0}(t, x) = -d \partial_y v|_{y=0}(t, x)$$

which is the *flux entering the field*.

When $D = 100$ and $d = 1$, Figure 46 confirms that the flux is negative in the middle of the road, and positive far away. Furthermore if we denote $x_0(t)$ the (rightmost) position where the flux changes sign, that is $F(t, x_0(t)) = 0$, the left panel of Figure 47 suggest that $x_0(t)$ asymptotically behaves like $\mathcal{O}(t^{1/2})$. Last, the right panel of Figure 47 indicates that the asymptotic decay rate of the flux at $x = 0$ is of the magnitude $\mathcal{O}((1+t)^{-3/2})$.

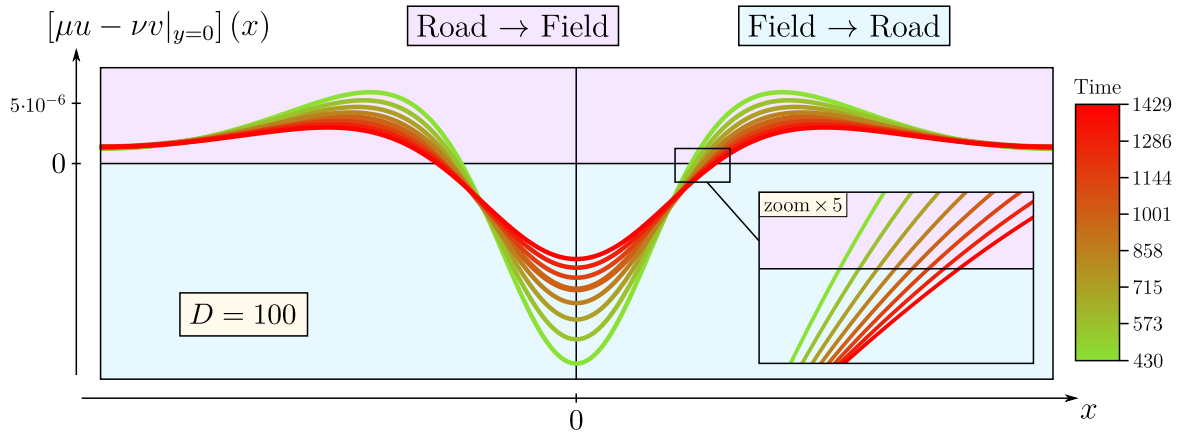


Figure 46 — Plot of the flux entering the field, $F(t, x) = \mu u(t, x) - \nu v|_{y=0}(t, x)$, of the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 200$, $d = \mu = \nu = 1$ and $D = 100$, arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbb{1}_{[-5,5] \times [0,5]}, 0)$, for eight different values of time.

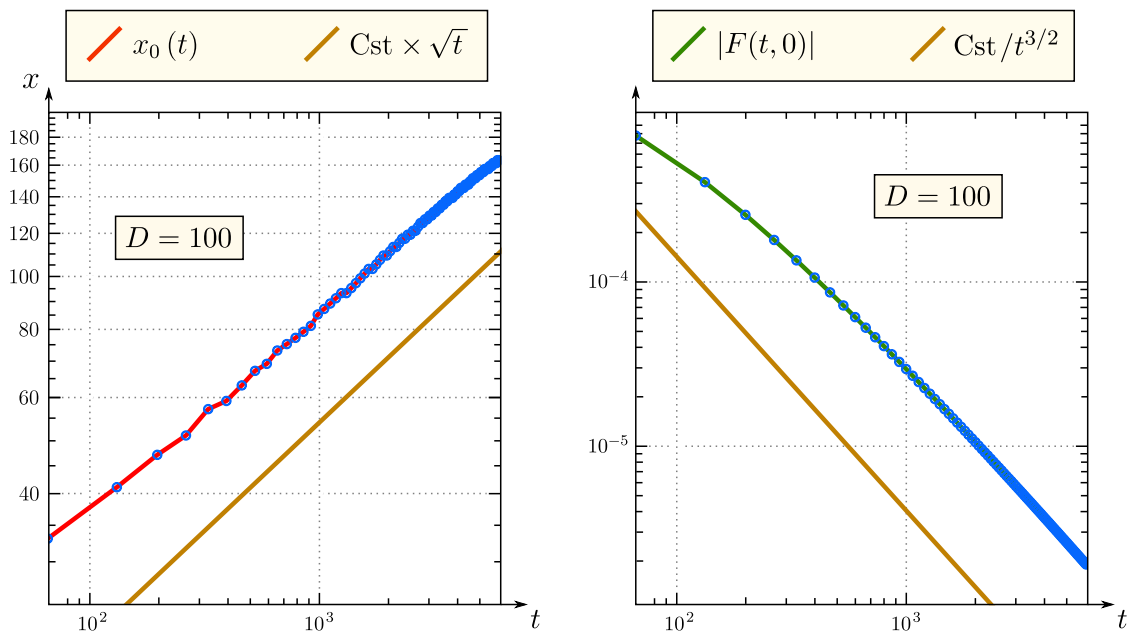


Figure 47 — Plots in log-scale of $x_0(t)$ (on left) and $|F(t, 0)|$ (on right) for the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 200$, $d = \mu = \nu = 1$ and $D = 100$, arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbb{1}_{[-5,5] \times [0,5]}, 0)$.

3.6. Numerical explorations

When $D = 0.1$, $d = 1$, Figure 48 indicates that the flux is positive in the middle of the road, and negative far away, that is the opposite situation than the previous case. Furthermore if we denote $x_0(t)$ the (rightmost) position where the flux changes sign, that is $F(t, x_0(t)) = 0$, the left panel of Figure 49 suggest that $x_0(t)$, again, asymptotically behaves like $\mathcal{O}(t^{1/2})$. Last, the right panel of Figure 49 indicates that the asymptotic decay rate of the flux at $x = 0$ is of the magnitude $\mathcal{O}((1+t)^{-2})$, which is in contrast with the previous case.

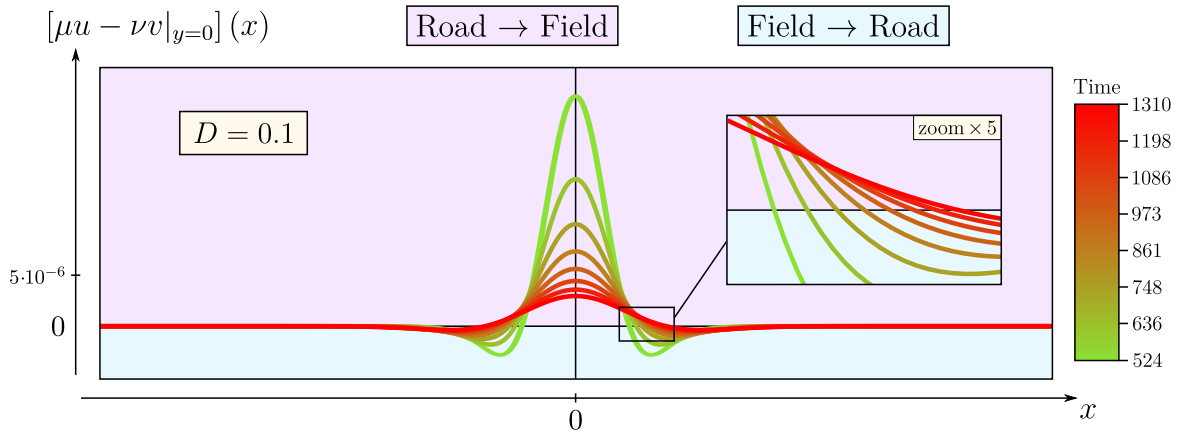


Figure 48 — Plot of the flux entering the field, $F(t, x) = \mu u(t, x) - \nu v|_{y=0}(t, x)$, of the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 200$, $d = \mu = \nu = 1$ and $D = 0.1$, arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbb{1}_{[-5,5] \times [0,5]}, 0)$, for eight different values of time.

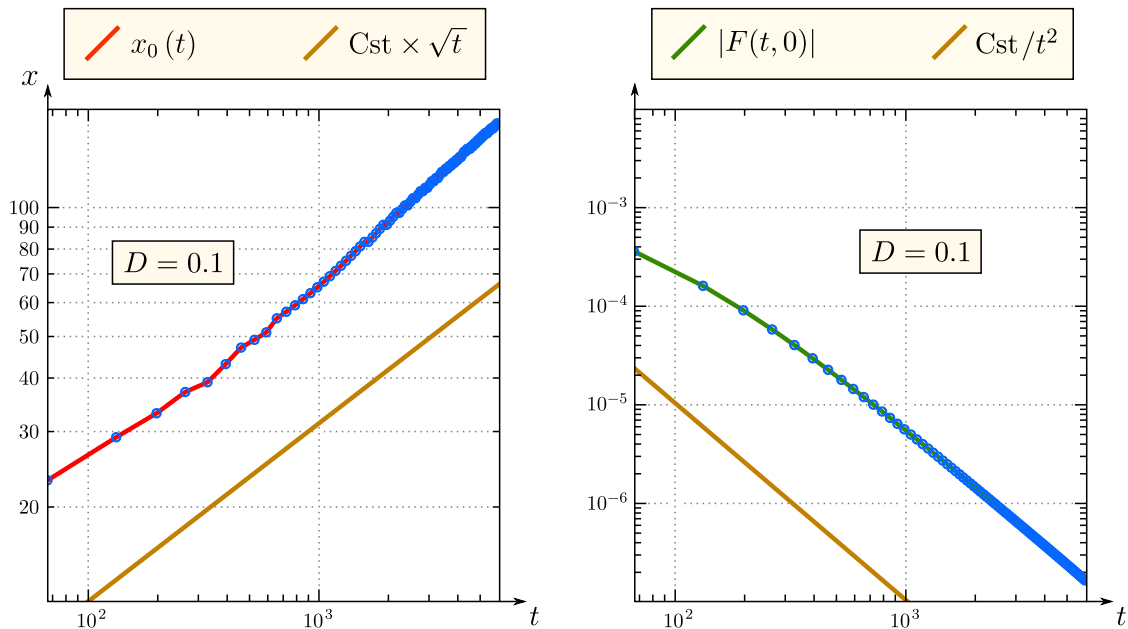


Figure 49 — Plots in log-scale of $x_0(t)$ (on left) and $|F(t, 0)|$ (on right) for the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 200$, $d = \mu = \nu = 1$ and $D = 0.1$, arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbb{1}_{[-5,5] \times [0,5]}, 0)$.

On the threshold value for the shape of the flux. From the above, the shape of the flux function F is very dependent on the value of D ($d = 1$ being fixed). As we may see in Figure 50, it seems there is a threshold value at $D = 2$. This could be related to the enhanced spreading speed for the Fisher-KPP system (3.2), noticed in the original paper [22], when $D > 2d$. It would be interesting to have a result that highlights some connections between the purely diffusive system (3.1) from one side, and the nonlinear system (3.2) from the other side, especially to identify more clearly the reason for this threshold.

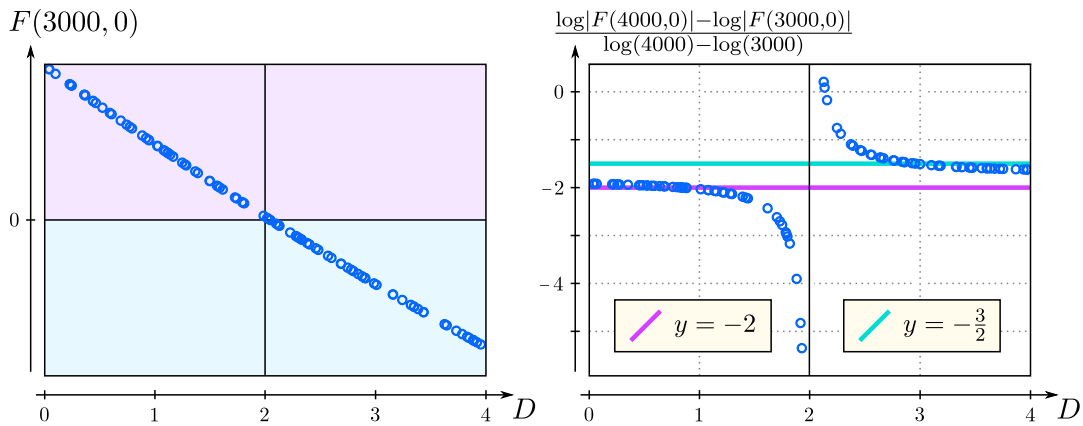


Figure 50 — Plot of $F(3000, 0)$ (on left) and the decay rate of $|F(t, 0)|$ (on right) with different values of D for the solution to the Cauchy problem (3.1)–(3.13) with $N = 2$, $M = 300$, $d = \mu = \nu = 1$, arising from the datum $(v_0, u_0) \equiv (\mathbf{1}_{[-20,20] \times [0,20]}, 0)$.

Let us make a concluding remark on the asymptotic decay rate of the flux. Notice that we have focused on the flux at $x = 0$. However, the L^∞ norm of the flux is not always attained at this point. In particular, we have numerically observed that, in the vicinity of $x = 0$, the flux is “dromedary shaped” (one bump) when D is much smaller than 2, but “camel shaped” (two bumps) when D is slightly smaller than 2. This oscillation phenomenon would deserve further investigations.

3.A Appendix

3.A.1 The complementary error function *Erfc*

Recalling that $\Gamma(\ell) = e^{-\ell^2}$, the *Erfc* function is defined by

$$\text{Erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \Gamma(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.61)$$

and has an holomorphic continuation, namely

$$\text{Erfc}(z) := 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} z^{2k+1}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.62)$$

3.A. Appendix

For any small $\delta > 0$, we have the asymptotic expansion, see [89] (page 393) or [44] (page 262),

$$\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{Erfc}}{\Gamma}(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{4z^5} + o\left(\frac{1}{|z|^6}\right), \quad \text{as } |z| \rightarrow +\infty, \quad (3.63)$$

uniformly in $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta\}$ — see Figure 52. By computing the derivatives of $\frac{\operatorname{Erfc}}{\Gamma}$ and using (3.63) one can check that, for all non-zero $z \in \mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\operatorname{Erfc}}{\Gamma}(z) \right| \lesssim \frac{1}{|z|}, \quad \left| \frac{d}{dz} \frac{\operatorname{Erfc}}{\Gamma}(z) \right| \lesssim \frac{1}{|z|^2}, \quad \left| \frac{d^2}{dz^2} \frac{\operatorname{Erfc}}{\Gamma}(z) \right| \lesssim \frac{1}{|z|^3}. \quad (3.64)$$

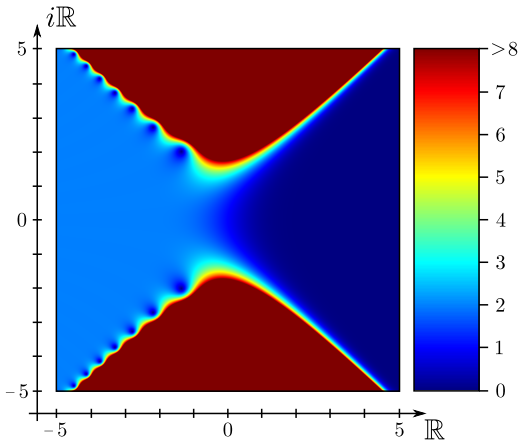


Figure 51 — Plot of $|\operatorname{Erfc}(z)|$.

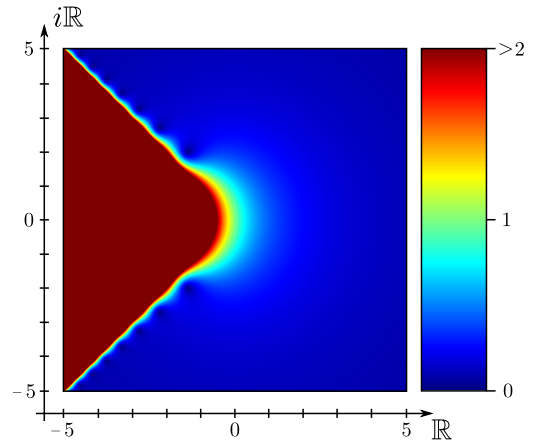


Figure 52 — Plot of $|\frac{\operatorname{Erfc}}{\Gamma}(z)|$.

3.A.2 The polynomials P_δ

Let $\mu, \nu, d > 0$ be given. For $\delta \geq 0$, we consider the polynomial

$$P_\delta(\sigma) := \sigma^3 + A\sqrt{d}\sigma^2 + (\mu + \delta)\sigma + A\sqrt{d}\delta,$$

where $A := \frac{\nu}{d}$. We denote $\alpha(\delta)$, $\beta(\delta)$ and $\gamma(\delta)$ its three complex roots. Notice that 0 is a root if and only if $\delta = 0$. Recall that P_δ has multiple roots if and only if the discriminant

$$\Delta_\delta := 18A^2d(\mu + \delta)\delta - 4A^4d^2\delta + A^2d(\mu + \delta)^2 - 4(\mu + \delta)^3 - 27A^2d\delta^2$$

vanishes. As a consequence, α , β and γ are distinct for almost all $\delta \geq 0$.

As easily checked, the real roots belong to $(-A\sqrt{d}, 0]$ and, since $\alpha + \beta + \gamma = -A\sqrt{d}$, we have

$$-A\sqrt{d} < \Re(\alpha(\delta)), \Re(\beta(\delta)), \Re(\gamma(\delta)) \leq 0, \quad \text{for all } \delta \geq 0. \quad (3.65)$$

Then, a more detailed analysis provides further information about the nature and the behavior of the roots, as stated in the following lemmas.

Lemma 3.8 (Large values of δ) *There is $\delta_\infty > 0$ large enough such that, for all $\delta \geq \delta_\infty$, the three roots are simple, one is real (say α) and the two others are complex conjugated (say $\Im(\beta) > 0$ and $\Im(\gamma) < 0$). Moreover, we have*

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \alpha(\delta) = -A\sqrt{d}, \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \Re(\beta(\delta)) = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \Im(\beta(\delta)) = +\infty,$$

so that, up to increasing δ_∞ if necessary, $|\beta - \gamma| > |\beta|$ for all $\delta \geq \delta_\infty$.

Next we fix $\nu > 0$ and $d > 0$ (and thus A) and describe the situations while decreasing the parameter μ from $+\infty$ to 0. Most of the results can be seen at a glance on Figure 53.

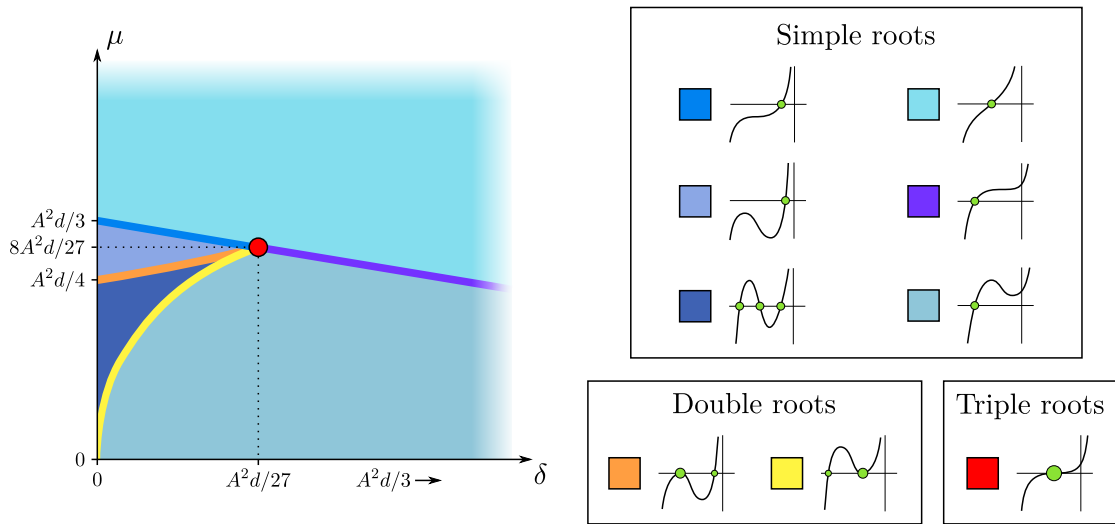


Figure 53 — Multiplicity of the roots of P_δ for fixed ν, d . Fix the last parameter $\mu > 0$, then δ browses $[0, +\infty)$.

Lemma 3.9 (Only simple roots) *Assume $\mu > \frac{8A^2d}{27}$ is fixed and set $\mathcal{E} := \mathbb{R}_+$.*

- (i) *For all $\delta \in \mathcal{E}$, the three roots are simple, one is real and the two others are complex conjugated.*
- (ii) *There is $\varepsilon > 0$ such that $\inf_{\delta \in \mathcal{E}} (|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|) > \varepsilon$.*

Lemma 3.10 (Appearance of a triple root) *Assume $\mu = \frac{8A^2d}{27}$ and set $\delta_0 := \frac{A^2d}{27}$.*

- (i) *If $\delta \neq \delta_0$, the three roots are simple, one is real and the two others are complex conjugated, and as δ encounters δ_0 , the three simple roots merge in a triple root $\lambda_0 = -\frac{A\sqrt{d}}{3}$.*

3.A. Appendix

Without loss of generality, we assume that α is the real root for all $\delta \geq 0$.

(ii) Letting $\varepsilon_R := \Re(\beta) - \lambda_0$ and $\varepsilon_I := \Im(\beta)$, one has

$$\alpha = \lambda_0 - 2\varepsilon_R, \quad \beta = \lambda_0 + \varepsilon_R + i\varepsilon_I, \quad \gamma = \lambda_0 + \varepsilon_R - i\varepsilon_I,$$

and $\varepsilon_R \stackrel{\delta \rightarrow \delta_0}{=} \mathcal{O}(\varepsilon_I)$.

Define $\eta := \frac{\delta_0}{2}$ and $\mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \setminus (\delta_0 - \eta, \delta_0 + \eta)$, then there is $\varepsilon > 0$ such that

(iii) $\inf_{\delta \in \mathcal{E}} (|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|) > \varepsilon$,

(iv) $\inf_{\delta \in \mathcal{E}^c} \inf_{\lambda \in [\alpha, \beta]} |\lambda| > \varepsilon$.

Lemma 3.11 (Appearance of a double root, two times) Assume $\frac{A^2 d}{4} \leq \mu < \frac{8A^2 d}{27}$, then there are $0 \leq \delta_1 < \delta_2$ such that the following holds.

(i) If $\delta \neq \delta_1$ and $\delta \neq \delta_2$, the three roots are simple and as δ encounters δ_i ($i = 1$ or 2), two of the three simple roots merge in a double root λ_i .

Without loss of generality, we assume that, for $i = 1$ or 2 , the double root λ_i derives from the merging of α and β . Define $\eta := \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}$ and

$$\mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \setminus [(\delta_1 - \eta, \delta_1 + \eta) \cup (\delta_2 - \eta, \delta_2 + \eta)],$$

then there is $\varepsilon > 0$ such that

(ii) $\inf_{\delta \in \mathcal{E}} (|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|) > \varepsilon$,

(iii) $\inf_{\delta \in \mathcal{E}^c} \inf_{\lambda \in [\alpha, \beta]} (|\lambda|, |\lambda - \gamma|) > \varepsilon$.

Lemma 3.12 (Appearance of a double root, one time) Assume $0 < \mu < \frac{A^2 d}{4}$, then there is $\delta_2 > 0$ such that the following holds.

(i) If $\delta \neq \delta_2$, the three roots are simple and as δ encounters δ_2 , two of the three simple roots merge in a double root λ_2 .

Without loss of generality, we assume that the double root λ_2 derives from the merging of α and β . Define $\eta := \frac{\delta_2}{2}$ and $\mathcal{E} := \mathbb{R}_+ \setminus (\delta_2 - \eta, \delta_2 + \eta)$, then there is $\varepsilon > 0$ such that

(ii) $\inf_{\delta \in \mathcal{E}} (|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|) > \varepsilon$,

$$(iii) \inf_{\delta \in \mathcal{E}^c} \inf_{\lambda \in [\alpha, \beta]} (|\lambda|, |\lambda - \gamma|) > \varepsilon.$$

3.A.3 Fourier, Laplace and Fourier/Laplace transforms

The transforms of a function w depending on $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ we use are

- the x -Fourier one (said “*hat w*”):

$$\widehat{w}(t, \xi) = \mathcal{F}[w(t, \cdot)](\xi) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} w(t, z) e^{-i\xi \cdot z} dz;$$

- the t -Laplace one (said “*frown w*”):

$$\widehat{w}(s, x) = \mathcal{L}[w(\cdot, x)](s) := \int_0^{+\infty} w(\tau, x) e^{-s\tau} d\tau;$$

- the x -Fourier/ t -Laplace one (said “*frown-hat w*”):

$$\widehat{w}(s, \xi) = \mathcal{FL}[w(\cdot, \cdot)](s, \xi) := \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} w(\tau, z) e^{-(s\tau + i\xi \cdot z)} d\tau dz.$$

The following Fourier and Laplace transforms are well-known — see, e.g., [135] (page 250, lines 84 and 88) for (iii) and (iv).

Lemma 3.13 (Useful x -Fourier and t -Laplace transforms) *For all $a \in \mathbb{R}$ and all $b \in \mathbb{C}$,*

$$(i) \mathcal{F} \left[x \mapsto \frac{e^{-\frac{\|x\|^2}{4a}}}{(4\pi a)^{\frac{N-1}{2}}} \right] (\xi) = e^{-a\|\xi\|^2}, \quad a > 0.$$

$$(ii) \mathcal{L} [t \mapsto e^{-at}] (s) = \frac{1}{a+s}, \quad s > -a.$$

$$(iii) \mathcal{L} \left[t \mapsto \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \right] (s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}, \quad s > 0.$$

$$(iv) \mathcal{L} \left[t \mapsto \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{a+2bt}{2\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{a^2}{4t}} \right] (s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s+b})}, \quad s > \Re(b)^2.$$

$$(v) \mathcal{L} \left[t \mapsto e^{-\frac{a^2}{4t}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + b \frac{\text{Erfc}}{\Gamma} \left(\frac{a-2bt}{2\sqrt{t}} \right) \right) \right] (s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s-b}}, \quad s > \Re(b)^2.$$

where $\Gamma(\ell) := e^{-\ell^2}$ and the definition of *Erfc* being recalled in Appendix 3.A.1.

Lemma 3.14 (Properties on x -Fourier and t -Laplace transforms) *For $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, all $a \in \mathbb{R}$ and $s > 0$,*

$$(i) f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathcal{F}[f](\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi,$$

3.A. Appendix

$$(ii) \mathcal{F}[f] \times \mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x-z)g(z)dz],$$

$$(iii) \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g] = \mathcal{L}\left[t \mapsto \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right],$$

$$(iv) \mathcal{L}[t \mapsto e^{-at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s+a).$$

CHAPTER 4

Blow-up vs. Global Existence for a Fujita-type Heat-Exchanger System

In this chapter, we analyze a reaction-diffusion system on \mathbb{R}^N which models the dispersal of individuals between two exchanging environments for its diffusive component and incorporates a Fujita-type growth for its reactive component. The originality of this model lies in the coupling of the equations through diffusion, which, to the best of our knowledge, has not been studied in Fujita-type problems. We first consider the underlying diffusive problem, demonstrating that the solutions converge exponentially fast towards those of two uncoupled equations, featuring a dispersive operator that is somehow a combination of Laplacians. By subsequently adding Fujita-type reaction terms to recover the entire system, we identify the critical exponent that separates systematic blow-up from possible global existence.

This chapter corresponds to a work written alone and published [139] in SIAM Journal on Mathematical Analysis.

Sommaire du chapitre

4.1 Introduction.....	164
4.2 Notations and main results.....	167
4.3 Asymptotic behavior of the Heat exchanger system.....	174
4.4 Possible global existence.....	179
4.5 Systematic blow-up.....	181

4.1 Introduction

In this chapter, we consider the semi-linear Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t u = c\Delta u - \mu u + \nu v + u^{1+\alpha}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t v = d\Delta v + \mu u - \nu v + \kappa v^{1+\beta}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ (u, v)|_{t=0} = (u_0, v_0), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4.1)$$

in any dimension $N \geq 1$. Here the parameters $c, d, \mu, \nu, \alpha, \beta$ are positive constants,

$$\kappa = 0 \quad \text{or} \quad \kappa = 1,$$

and the data u_0 and v_0 are taken non-both-trivial and non-negative in $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. This system is motivated by biological issues, particularly the field-road reaction-diffusion system — see (4.8) — for which no Fujita-type result has been established yet.

It is well-known that (4.1) owns a unique maximal solution

$$(u, v) \in (C^1((0, T), L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)))^2,$$

such that (u, v) converges to (u_0, v_0) in $(L^1(\mathbb{R}^N))^2$ as $t \rightarrow 0$. Furthermore, by parabolic regularity, (u, v) also belongs to $(C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N))^2$. Importantly, the cooperative nature of the system ensures the validity of the comparison principle. These results are classical and can be found in [144], [77] and [67] for instance. The main objective of this chapter is to determine whether T is finite or not. If $T = \infty$ we refer to (u, v) as a global solution, while $T < \infty$ enforces

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) = \infty, \quad (4.2)$$

and we say that (u, v) blows-up in finite time.

Back in 1966, Fujita conducted the pioneering work [78] on the initial value problem

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u^{1+\alpha}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (4.3)$$

He showed that for non-negative and non-trivial datum u_0 , there is a critical exponent $\alpha_F := 2/N$ (later referred to as the Fujita exponent) that separates systematic blow-up of the solutions from possible global existence. More precisely, if $0 < \alpha < \alpha_F$, any solution to (4.3) blows-up in finite time. Conversely, if $\alpha > \alpha_F$, problem (4.3) admits global solutions as long as u_0 is chosen “sufficiently small”. Additionally, the global solutions provided by this case asymptotically vanish in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. The critical case $\alpha = \alpha_F$ has subsequently been investigated in various works, including [87], [94], [14], [145], and falls within the systematic blow-up regime.

The regime transition that occurs at $1/\alpha = N/2$ can intuitively be explained by observing that the equation in (4.3) is a combination of the growth phenomenon resulting

from the non-linearity and of the dispersive effect arising from the Laplacian. The growth of the solutions to (4.3) is related to the underlying ODE $U' = U^{1+\alpha}$ whose solutions have the form $U(t) = C/(T - t)^{1/\alpha}$ and blow-up with *algebraic blow-up rate* $1/\alpha$. On the other hand, solutions to the Heat equation $\partial_t \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$ vanish for integrable initial datum, and the sharp uniform control $\|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C/t^{N/2}$ indicates that this vanishing occurs with *algebraic decay rate* $N/2$. By formally combining the growth and diffusive actions into (4.3), Fujita's result states that global solutions can only exist if the diffusion decay rate exceeds the growth blow-up rate, which is $N/2 > 1/\alpha$. Otherwise the dispersive effect of the diffusion is never strong enough to prevent the blowing-up driven by the reaction term.

Since the critical case was classified, many works have shown significant interest in (4.3), either by deepening the established results, or by exploring variations of the problem or additional effects. A wide range of references can be found in the survey articles by Levine [101] and Deng and Levine [50], as well as in the books by Hu [91] and Quittner and Souplet [123].

The first variation of (4.3) that takes the form of a system appeared in 1991 in the work of Escobedo and Herrero [63]. In their study, they considered

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + v^{1+\alpha}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t v = \Delta v + u^{1+\beta}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (4.4)$$

Similarly to the Fujita's problem (4.3), the system (4.4) may be interpreted as the result of the interplay between a growth phenomenon described by the coupled ODE system

$$\begin{cases} U' = V^{1+\alpha}, & t > 0, \\ V' = U^{1+\beta}, & t > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

and an uncoupled diffusion process governed by

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{u}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \mathbf{v} &= \Delta \mathbf{v}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

The results presented in [63] highlight that the transition from systematic blow-up from possible global existence is once again determined by the balance between the growth blow-up rate and the diffusion decay rate. Specifically, for non-negative and non-both-trivial initial values U_0, V_0 , both components of the solution (U, V) to (4.5) blows-up in finite time with the blow-up rates

$$a := \frac{2 + \alpha}{\alpha + \beta + \alpha\beta} \text{ for } U, \quad \text{and} \quad b := \frac{2 + \beta}{\alpha + \beta + \alpha\beta} \text{ for } V.$$

Consequently, for system (4.4) to have global solutions, $N/2$ must be larger than both a and b , while systematic blow-up occurs as soon as a or b exceeds $N/2$.

The work of Escobedo and Herrero have been extended in several ways. First, the introduction of different diffusion coefficients has been investigated in [70] by Fila, Levine

and Uda. Although they reached the same conclusions as in the case of identical diffusions, it should be noted that considering different diffusion rates significantly increases the complexity of the problem. This draws attention to one of the key challenges involved in working with system (4.1) which is discussed in more details in Section 4.2. More recently, in [146], problem (4.4) has also been studied by taking some compactly supported non-local diffusion operators instead of the Laplacians. As for the non-linear effects, the case of time-weighted reactions $(f(t)v^{1+\alpha}, g(t)u^{1+\beta})$ was tackled in [142], [38], [39], and that of space-weighted reactions $(|x|^{\sigma_1}v^{1+\alpha}, |x|^{\sigma_2}u^{1+\beta})$ was discussed in [110]. An expansion of (4.4) with a “chain coupling” of more than two unknowns was also handled in [124].

Various other types of systems have been developed based on Fujita’s problem (4.3). We mention for instance systems for which the reaction terms take the form $(u^\alpha v^\beta, u^\gamma v^\delta)$ studied in [122], [64], [104], [133], [51] or $(u^\alpha + v^\beta, u^\gamma + v^\delta)$ considered in [42], [134], [39].

We would like to stress that in all the semi-linear systems mentioned above, the interaction between the unknowns occurs through the non-linear growth terms. However, this is not the case for problem (4.1) investigated in this chapter. Indeed, as for (4.3) and (4.4), we can extract from (4.1) a “diffusive component”:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} = c\Delta \mathbf{u} - \mu \mathbf{u} + \nu \mathbf{v}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \mathbf{v} = d\Delta \mathbf{v} + \mu \mathbf{u} - \nu \mathbf{v}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (4.6)$$

that we call *Heat exchanger* and which contains all the coupling parts of (4.1). We interpret system (4.6) as a population dynamics model for a single species dispersing on two parallel environments and switching from one to the other. Observe that (4.6) preserves the mass of its initial datum over time, that is

$$\|\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \equiv \|\mathbf{u}(0) + \mathbf{v}(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{for all } t > 0. \quad (4.7)$$

A detailed description of solutions to (4.6) is given in Theorem 4.1, Corollary 4.2 and their surrounding comments. These results are necessary preliminaries to address the systematic blow-up versus possible global existence for the problem (4.1).

Such a model which exchanges individuals between two domains is not new in the literature. In particular, the linear Heat exchanger system (4.6) is influenced by the field-road diffusive model

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} = d\Delta \mathbf{v}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \quad y > 0, \\ -d\partial_y \mathbf{v}|_{y=0} = \mu \mathbf{u} - \nu \mathbf{v}|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \\ \partial_t \mathbf{u} = D\Delta \mathbf{u} - \mu \mathbf{u} + \nu \mathbf{v}|_{y=0}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{N-1}, \end{cases} \quad (4.8)$$

where $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}(t, x, y), \mathbf{u}(t, x))$, introduced in 2013 by Berestycki, Roquejoffre and Rossi in [22] and whom both fundamental solutions and asymptotic decay rate were recently studied in [6]. Traditionally, the field-road diffusive model is supplemented with a reaction term f in the field which is represented by the first line of (4.8). As far as we know, no Fujita-type reaction f such as $f(v) = v^{1+\alpha}$ has been considered in the literature. In this case (as with system (4.1)), it is worth noting that the equations are coupled through the

diffusion process. In this chapter, we therefore propose to study problem (4.1) as a first step towards investigating these “coupled by diffusion” Fujita-type systems.

This chapter is structured as follows. In Section 4.2, we start with an introduction of the notations used throughout. Subsequently, we present our results on the diffusive system (4.6) and the semi-linear problem (4.1) in Subsection 4.2.1 and Subsection 4.2.2 respectively. The remaining sections are devoted to providing the proofs for the statements outlined in Section 4.2. Specifically, in Section 4.3 we prove the results related to linear system (4.6). In Section 4.4 we address problem (4.1) when global existence is achievable. Lastly, we discuss the systematic blow-up case in Section 4.5.

4.2 Notations and main results

The conventions and notations used in this chapter are gathered below.

To avoid confusion, we use bold font (e.g. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}$) to denote the solutions to diffusive problems, while we use regular font (e.g. u, v, σ, δ) for the solutions to non-linear problems. Additionally, if $w = w(t, x)$, the abbreviation $w(t)$ obviously stands for the function $w(t, \cdot)$. We also indicate functions that depend solely on time — such as ODE solutions — in capital letters (e.g. U, V, S, D).

In the whole document the function $G = G(t, x) := (4\pi t)^{-N/2} e^{-|x|^2/4t}$ denotes the Heat kernel in \mathbb{R}^N with unit diffusion rate, and $*$ is the classical convolution product. For any subset $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, we denote $\partial\Omega$ its topological frontier. In addition, we use $\mathcal{B}(0, R)$ to denote the ball $\{x \in \mathbb{R}^N \text{ such that } |x| < R\}$, and $\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0, R)}$ to represent its indicator function.

For any $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, the Fourier transform we employ is defined by

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx,$$

for which holds the inversion formula $f = (2\pi)^{-N} \mathcal{F} \circ \mathcal{F}[f(-\cdot)]$ as soon as $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ and the Hausdorff-Young inequalities

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (2\pi)^{-N} \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{and} \quad \|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.9)$$

We adopt the notation $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ to represent the Schwarz space of rapidly decreasing functions that consists of smooth functions $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ that, along with all their derivatives, exhibit faster decay than any polynomial as $|x| \rightarrow \infty$.

4.2.1 The linear problem (4.6)

To start with, let us consider the Heat exchanger system (4.6) in the case where all the parameters c, d, μ, ν are equal to 1. Then the linear transformation $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}) := (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$

enables the uncoupling of the unknowns, and thus,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \frac{1 + e^{-2t}}{2} (G(t) * u_0) + \frac{1 - e^{-2t}}{2} (G(t) * v_0), \\ \mathbf{v}(t) &= \frac{1 - e^{-2t}}{2} (G(t) * u_0) + \frac{1 + e^{-2t}}{2} (G(t) * v_0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

From (4.10), observe that (\mathbf{u}, \mathbf{v}) separates into an evanescent part $(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)$ which decays exponentially fast, and a persistent part $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$, which is the solution to the uncoupled Heat equations

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_\infty &= \Delta \mathbf{u}_\infty, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \mathbf{v}_\infty &= \Delta \mathbf{v}_\infty, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

both starting from the averaged datum $(u_0 + v_0)/2$. In particular, it becomes clear that both \mathbf{u} and \mathbf{v} converge to zero with algebraic decay rate $N/2$. Our first primary contribution is to demonstrate that a similar phenomenon occurs in the general case where c, d, μ, ν may differ.

Theorem 4.1 (Asymptotic behavior of the solutions to the diffusive Heat exchanger)
 Let (\mathbf{u}, \mathbf{v}) be the solution to system (4.6) supplemented with non-negative initial datum (u_0, v_0) , such that $u_0, v_0, \widehat{u}_0, \widehat{v}_0$ are all in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Define, for $\xi \in \mathbb{R}^N$, the radial functions

$$r(\xi) := \frac{c-d}{2} |\xi|^2 + \frac{\mu-\nu}{2}, \quad s(\xi) := \mu\nu + [r(\xi)]^2, \quad (4.11)$$

$$L(\xi) := \sqrt{s(\xi)} - \left(\frac{c+d}{2} |\xi|^2 + \frac{\mu+\nu}{2} \right), \quad (4.12)$$

and the dispersal operator $\mathcal{L} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ through the relation

$$\mathcal{F}[\mathcal{L}f] = L \times \mathcal{F}[f], \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \quad (4.13)$$

Finally, let $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ be the solution to the uncoupled diffusion equations

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_\infty &= \mathcal{L} \mathbf{u}_\infty, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \partial_t \mathbf{v}_\infty &= \mathcal{L} \mathbf{v}_\infty, & t > 0, & \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (4.14)$$

respectively starting from the data $u_{\infty,0}$ and $v_{\infty,0}$ defined via their Fourier transforms:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{\infty,0} &:= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{r(\xi)}{\sqrt{s(\xi)}} \right) \widehat{u}_0 + \frac{\nu}{\sqrt{s(\xi)}} \widehat{v}_0 \right], \\ \widehat{v}_{\infty,0} &:= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{\sqrt{s(\xi)}} \widehat{u}_0 + \left(1 + \frac{r(\xi)}{\sqrt{s(\xi)}} \right) \widehat{v}_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.2. Notations and main results

Then there are two positive constants k and k' which depend on N, c, d, μ, ν such that

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq k \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}}, \\ \|v(t) - v_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq k' \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

for all $t > 1$.

Remarks on Theorem 4.1.

- *The operator \mathcal{L} — (4.12)-(4.13).* By observing the behavior of L at high and low frequencies, we can discern similarities between \mathcal{L} and the Laplacian. Specifically, recalling the identity

$$\mathcal{F}[c\Delta f] = -c|\xi|^2 \times \mathcal{F}[f], \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

an analysis of L near the null frequency and as $|\xi|$ approaches infinity reveals that \mathcal{L} behaves like $(c\nu + d\mu)(\mu + \nu)^{-1}\Delta$ at low frequencies and $\min(c, d)\Delta$ at high frequencies. Note also that L becomes independent on the exchange parameters μ and ν when the diffusion rates c and d are equal. In this case, $\mathcal{L} \equiv c\Delta \equiv d\Delta$.

Figure 54 below presents radial profiles of L for various combinations of the parameters c, d, μ, ν . The first line is the simple case $c = d = \mu = \nu = 1$, for which $L(\xi) = -|\xi|^2$. Upon examining the different profiles of L in Figure 54, we observe two distinct types of shapes that depend on how L changes its behavior from zero to infinity. More precisely, we see “soft transitions” in the first and second lines of the table, and “sharp transitions” in the third and last lines. These differences in the shapes of the decay may indicate varying degrees of homogeneity/heterogeneity in how u and v interact with individuals in their respective environments. Indeed, recalling that μ (resp. ν) represents the outgoing exchange rate of u (resp. v), we can observe that in the sharp transitions cases only, one of the two unknowns has both a large diffusion rate and an outgoing exchange rate less than or equal to the ingoing one. In this way, the strongest diffuser that primarily conserves its individuals mostly affects the low frequencies of L , its contribution quickly vanishing at high frequencies.

- *The persistent data $u_{\infty,0}$ and $v_{\infty,0}$ — (4.15).* By analyzing (4.11), observe that $|r/\sqrt{s}|$ and $1/\sqrt{s}$ stay bounded between 0 and 1, ensuring the integrability of $\widehat{u}_{\infty,0}$ and $\widehat{v}_{\infty,0}$. Therefore, $u_{\infty,0}$ and $v_{\infty,0}$ can be defined correctly by (4.15) and written using the inversion formula given at the beginning of Section 4.2.

When the diffusion rates c and d are equal, expressions of $u_{\infty,0}$ and $v_{\infty,0}$ become straightforward linear combinations of u_0 and v_0 , and the Fourier transform is no longer required to explain them. When the diffusion rates are different — let us say $c < d$ for simplicity — the positive functions $(1 + r/\sqrt{s})/2$, $\mu/2\sqrt{s}$ and $\nu/2\sqrt{s}$ collapse algebraically fast in the high frequencies, acting as low-pass filters. Similarly, the positive function $(1 - r/\sqrt{s})/2$ acts as a high-pass filter by remaining below the value 1 towards which it converges as $|\xi|$

goes to infinity. Therefore, we can understand the persistent data $u_{\infty,0}$ and $v_{\infty,0}$ as linear combinations of u_0 and v_0 that have been altered by high- and low-pass frequency filters.

c	d	μ	ν	Radial profile of L	System dynamic
1	1	1	1		$c \rightleftharpoons d$
.01	10	.01	10		$c \rightleftharpoons d$
.01	10	1	1		$c \rightleftharpoons d$
.01	10	10	.01		$c \rightleftharpoons d$

Figure 54 — Representation of $L(\xi)$ for different combinations of c, d, μ, ν . The curves are shown at different scales for readability reasons. The “soft transition cases” (resp. “sharp transition cases”) — see the remarks on \mathcal{L} above — are displayed in the first and second (resp. third and fourth) lines. The final column provides a visual representation of how \mathbf{u} and \mathbf{v} exchange and spread the individuals.

We now examine the decay rate of (\mathbf{u}, \mathbf{v}) which is expected to be algebraic. To reach this, it suffices to know how $\mathbf{u}_{\infty}(t)$ and $\mathbf{v}_{\infty}(t)$ decay in $L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, given the exponential convergence towards the persistent part $(\mathbf{u}_{\infty}, \mathbf{v}_{\infty})$ ensured by Theorem 4.1. The corollary that follows reveals that this decaying occurs with magnitude $N/2$, which is tightly related to how the operator \mathcal{L} affects the low frequencies of its argument.

Corollary 4.2 (Decay rate of the solutions to the diffusive Heat exchanger) *Under the hypothesis of Theorem 4.1, there are two positive constants ℓ and ℓ' depending on N, c, d, μ, ν , such that*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} &\leq \ell \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / (1+t)^{N/2}, \\ \|\mathbf{v}(t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^N)} &\leq \ell' \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / (1+t)^{N/2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

for all $t \geq 0$.

4.2.2 The semi-linear problem (4.1)

Having examined the behavior of the pure diffusive Heat exchanger (4.6) in the previous subsection, we are now prepared to address the question of global existence versus blow-up

for our main problem (4.1). Before proceeding with the analysis, it is worth recalling that the comparison principle ensures that, given the same initial datum (u_0, v_0) , the solution to $(4.1)|_{\kappa=0}$ always remains lower than the solution to $(4.1)|_{\kappa=1}$. Consequently, to demonstrate blow-up, it is sufficient to consider $(4.1)|_{\kappa=0}$, while to establish global existence, we only need to examine $(4.1)|_{\kappa=1}$.

Corollary 4.2 states that the solutions to (4.6) decay uniformly to zero at the algebraic rate $N/2$. With regard to the uncoupled reaction component of (4.1), namely,

$$\begin{aligned} U' &= U^{1+\alpha}, & t > 0, \\ V' &= \kappa V^{1+\beta}, & t > 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

it is apparent that, given any positive initial data U_0, V_0 ,

- U blows-up at the rate $1/\alpha$ for $\kappa \in \{0, 1\}$, and
- V blows-up at the rate $1/\beta$ only when $\kappa = 1$.

As observed in introduction, we anticipate distinguishing between systematic blow-up and possible global existence by comparing the decay rate of (4.6) with the blow-up rates of (4.18). To be more specific, the regime transition is expected at $N/2 = 1/\alpha$ when $\kappa = 0$ and $N/2 = \max(1/\alpha, 1/\beta)$ when $\kappa = 1$.

These critical exponents can simply be confirmed when the rates c, d, μ, ν are identical. To see this, let us assume $c = d = \mu = \nu = 1$, and define $(\sigma, \delta) := (u + v, u - v)$. Observe that the blowing-up of σ is equivalent to that of (u, v) . We first examine the solutions to $(4.1)|_{\kappa=1}$ to explore the possible global existence. In an attempt to show that σ may not blow-up, we have

$$\partial_t \sigma = \Delta \sigma + u^{1+\alpha} + v^{1+\beta} \leq \Delta \sigma + \sigma^{1+\alpha} + \sigma^{1+\beta} =: \mathcal{L}\sigma.$$

Thus σ serves as a sub-solution to $\partial_t = \mathcal{L}$. Under the assumption $\min(\alpha, \beta) > 2/N$, we can find small enough positive values η and R to allow the solution $\bar{\sigma}$ to the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\sigma} = \Delta \bar{\sigma} + 2\bar{\sigma}^{1+\min(\alpha, \beta)}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \bar{\sigma}|_{t=0} = \eta \mathbf{1}_{B(0, R)}, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

to be global and such that $\bar{\sigma}(t) \leq 1$ for any $t > 0$. This can be seen from the classical construction of global super-solutions as the product of a time-dependent function with the solution to the Heat equation — see [123, page 130] for instance. Using this estimation on $\bar{\sigma}$, we write

$$\partial_t \bar{\sigma} \geq \Delta \bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{1+\min(\alpha, \beta)} + \bar{\sigma}^{1+\max(\alpha, \beta)} = \mathcal{L}\bar{\sigma},$$

which indicates that $\bar{\sigma}$ is a global super-solution to $\partial_t = \mathcal{L}$. Now, $\sigma \leq \bar{\sigma}$ as long as u_0 and v_0 are chosen small enough to satisfy $u_0 + v_0 \leq \eta \mathbf{1}_{B(0, R)}$, and with that condition met, this case is resolved.

For the systematic blow-up (still with $c = d = \mu = \nu = 1$) we examine $(4.1)|_{\kappa=0}$, and observe that

$$\partial_t \delta = \Delta \delta - 2\delta + u^{1+\alpha} \geq \Delta \delta - 2\delta,$$

which implies that δ remains greater than the sub-solution $e^{-2t}(G(t) * (u_0 - v_0))$, that is positive as long as $u_0 > v_0$. It is important to note that the assumption $u_0 > v_0$ is not a strict requirement for proving systematic blow-up. Indeed, we may suppose $u_0 > 0$ (even if we need to shift the time for this to hold) and then work with the solution arising from the initial datum $(u_0, 0)$. With the established order relation $u > v$ which holds for all times, we can determine now that σ systematically blows-up when $\alpha < 2/N$ since

$$\partial_t \sigma = \Delta \sigma + u^{1+\alpha} \geq \Delta \sigma + (u/2 + v/2)^{1+\alpha} = \Delta \sigma + \frac{\sigma^{1+\alpha}}{2^{1+\alpha}}.$$

In those cases of identical rates, the key argument that enables progress concisely stands in

$$c\Delta u \pm d\Delta v = c\Delta(u \pm v) = d\Delta(u \pm v).$$

However, these equalities break down when the diffusion rates differ, making $c \neq d$ one of the main challenges of the problem. In the general case where c, d, μ, ν are arbitrary, we cannot rely on our knowledge about Fujita's original problem (4.3) to draw conclusions on the lifetime of solutions to (4.1). Theorem 4.3 and Theorem 4.4 fill this gap and are the main contribution of the present chapter.

Theorem 4.3 (Possible global existence) *Let*

$$\frac{N}{2} > \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{if } \kappa = 0, \\ \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) & \text{if } \kappa = 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Then there is $m_0 > 0$ that depends on $N, c, d, \mu, \nu, \alpha, \beta, \kappa$ such that the solution (u, v) to problem (4.1) with non-negative (u_0, v_0) exists for all times as soon as

$$m := \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} < m_0. \quad (4.20)$$

Furthermore, under hypothesis (4.20),

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{M}{(1+t)^{N/2}} \quad \text{and} \quad \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{M'}{(1+t)^{N/2}}, \quad (4.21)$$

for all $t > 0$ and some positive constants M and M' depending on $N, c, d, \mu, \nu, \alpha, \beta, \kappa$, and m .

Theorem 4.4 (Systematic blow-up) *Let*

$$\frac{N}{2} < \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{if } \kappa = 0, \\ \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) & \text{if } \kappa = 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Then any solution (u, v) to problem (4.1) with non-both-trivial and non-negative initial datum $(u_0, v_0) \in (L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^2$ blows-up in finite time.

Remark on Theorem 4.4.

• *Simultaneous versus non-simultaneous blow-up.* Based on (4.2), it is clear that at least one of the two components of (u, v) becomes unbounded at the blowing time. Nevertheless, it remains uncertain whether only one component or both components tend to infinity as the blowing-up occurs. The first scenario is called non-simultaneous blow-up, whereas the second is referred to as simultaneous blow-up. Souplet and Tayachi have explored similar issues in [134] for a Fujita-type system with reactions taking the form of $(u^\alpha + v^\beta, u^\gamma + v^\delta)$. In their study, they succeeded to separate systematic simultaneous from possible non-simultaneous blow-up with conditions between α and γ and between β and δ . As for problem (4.1), we leave this issue as an open question, but we nevertheless emphasize that the integrability in time of the $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ -norm of the component that goes to infinity could be a decisive factor in determining the behavior of the other component. To illustrate this idea, let us consider the simple case $(4.1)|_{\kappa=0}$ with $c = d = \mu = \nu = 1$ supplemented with non-negative and identically constant datum (U_0, V_0) . In this case the solution (U, V) does not depend on space and thus solves the ODE system

$$\begin{cases} U' = -U + V + U^{1+\alpha}, & t > 0, \\ V' = U - V, & t > 0. \end{cases}$$

Observe that if we suppose $U_0 > V_0$, then (by subtracting the unknowns) $U > V$, so that

$$(U + V)' = U^{1+\alpha} \geq (U/2 + V/2)^{1+\alpha} = \frac{1}{2^{1+\alpha}}(U + V)^{1+\alpha},$$

and $U + V$ blows-up at some finite time T with at least U becoming unbounded at this time. Now assume the blow-up rate of U to be of magnitude $a > 0$, namely,

$$\underline{C}/(T - t)^a \leq U(t) \leq \bar{C}/(T - t)^a,$$

for any $t \in (0, T)$ and some positive constants $\underline{C} \leq \bar{C}$. Turning to V , we have

$$e^{-t}V_0 + \underline{C} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)}}{(T-s)^a} ds \leq V(t) \leq e^{-t}V_0 + \bar{C} \int_0^t \frac{e^{-(t-s)}}{(T-s)^a} ds.$$

Thus, the boundedness of V at the blowing time is equivalent to the convergence of the integral $\int_0^T (T-s)^{-a} ds$, which occurs as soon as $a < 1$. This conditions express that U must diverge slowly in some sense if we want V to be able to explode with it. Obviously, this is a formal argument and a rigorous proof would require a more detailed analysis of the system. Nevertheless, this example illustrates the importance of the blow-up rate in determining the behavior of solutions near the blowing-up.

4.3 Asymptotic behavior of the Heat exchanger system

This section focuses on the large time behavior of the solution (\mathbf{u}, \mathbf{v}) to the Cauchy problem associated with the linear system (4.6).

We begin by providing the proof of Theorem 4.1, which relies on Fourier analysis of the solution. By doing so, we are able to separate (\mathbf{u}, \mathbf{v}) into two parts, $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ and $(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)$, where an $L_x^\infty(\mathbb{R}^N)/L_\xi^1(\mathbb{R}^N)$ -analysis shows that the second part decays exponentially fast. Finally we evaluate the time derivatives of $\widehat{\mathbf{u}}_\infty$ and $\widehat{\mathbf{v}}_\infty$ which brings us to the formulation of problem (4.14)-(4.15).

Proof of Theorem 4.1. Applying the Fourier transform to the equations in (4.6), namely

$$\partial_t \mathbf{u} = c\Delta \mathbf{u} - \mu \mathbf{u} + \nu \mathbf{v} \quad \text{and} \quad \partial_t \mathbf{v} = d\Delta \mathbf{v} + \mu \mathbf{u} - \nu \mathbf{v},$$

we are led to the ODE system

$$\partial_t \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}} \\ \widehat{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -c|\xi|^2 - \mu & \nu \\ \mu & -d|\xi|^2 - \nu \end{pmatrix}}_{=:A(\xi)} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}} \\ \widehat{\mathbf{v}} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

It may be checked that the two eigenpairs, $(\lambda_+(\xi), e_+(\xi))$ and $(\lambda_-(\xi), e_-(\xi))$, of A are given by

$$\lambda_\pm = -\left(\frac{c+d}{2}|\xi|^2 + \frac{\mu+\nu}{2}\right) \pm \sqrt{s} \quad \text{and} \quad e_\pm = \begin{pmatrix} \nu \\ r \pm \sqrt{s} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

where r and s are defined in (4.11). As a result, we obtain the following expressions for $\widehat{\mathbf{u}}$ and $\widehat{\mathbf{v}}$:

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}(t, \xi) \\ \widehat{\mathbf{v}}(t, \xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{s}}\right) e^{t\lambda_+} + \left(1 + \frac{r}{\sqrt{s}}\right) e^{t\lambda_-} & \frac{\nu}{\sqrt{s}} (e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-}) \\ \frac{\mu}{\sqrt{s}} (e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-}) & \left(1 + \frac{r}{\sqrt{s}}\right) e^{t\lambda_+} + \left(1 - \frac{r}{\sqrt{s}}\right) e^{t\lambda_-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{v}_0(\xi) \end{pmatrix}.$$

We split $\widehat{\mathbf{u}}$ and $\widehat{\mathbf{v}}$ into

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_\infty(t, \xi) \\ \widehat{\mathbf{v}}_\infty(t, \xi) \end{pmatrix} := \frac{e^{t\lambda_+}}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{r}{\sqrt{s}} & \frac{\nu}{\sqrt{s}} \\ \frac{\mu}{\sqrt{s}} & 1 + \frac{r}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{v}_0(\xi) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

and

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_e(t, \xi) \\ \widehat{\mathbf{v}}_e(t, \xi) \end{pmatrix} := \frac{e^{t\lambda_-}}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{r}{\sqrt{s}} & -\frac{\nu}{\sqrt{s}} \\ -\frac{\mu}{\sqrt{s}} & 1 - \frac{r}{\sqrt{s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{u}_0(\xi) \\ \widehat{v}_0(\xi) \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

4.3. Asymptotic behavior of the Heat exchanger system

so that

$$\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{u}}_\infty + \widehat{\mathbf{u}}_e \quad \text{and} \quad \widehat{\mathbf{v}} = \widehat{\mathbf{v}}_\infty + \widehat{\mathbf{v}}_e,$$

and the boundedness of the matrices in (4.25) and (4.26) provides the necessary integrability to go back into the spatial domain. As a result, we can write

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_e \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_e.$$

The remainder of the proof consists in demonstrating that the evanescent parts $\mathbf{u}_e(t)$ and $\mathbf{v}_e(t)$ decay exponentially fast in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Following this, we establish that $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ indeed serves as the solution to the Cauchy problem (4.14)-(4.15).

• *Vanishing of $(\mathbf{u}_e(t), \mathbf{v}_e(t))$.* Thanks to the Hausdorff-Young inequalities (4.9), controlling $\widehat{\mathbf{u}}_e(t)$ and $\widehat{\mathbf{v}}_e(t)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ enables us to obtain estimates on $\mathbf{u}_e(t)$ and $\mathbf{v}_e(t)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. To accomplish this, we first analyze the components of (4.26) which result in the following estimates for all $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$\lambda_- \leq - \left(\frac{c+d}{2} |\xi|^2 + \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2} \right), \quad (4.27)$$

$$\left| 1 \pm \frac{r}{\sqrt{s}} \right| \leq 2, \quad \frac{\nu}{\sqrt{s}} \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{s}} \leq \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}, \quad (4.28)$$

and using (4.9),

$$\left| \widehat{u}_0(\xi) \right| \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \quad \text{and} \quad \left| \widehat{v}_0(\xi) \right| \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.29)$$

Then, by considering the expression for $\widehat{\mathbf{u}}_e(t)$ in (4.26), the estimation of its L^1 -norm gives, for $t > 1$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{u}}_e(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \left(1 + \frac{r}{\sqrt{s}} \right) \widehat{u}_0(\xi) - \frac{\nu}{\sqrt{s}} \widehat{v}_0(\xi) \right| e^{t\lambda_-} d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \left(2\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t \frac{c+d}{2} |\xi|^2} d\xi \\ &\leq \max \left(1, \sqrt{\frac{\nu}{4\mu}} \right) \left(\frac{2\pi}{c+d} \right)^{N/2} \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

where (4.27), (4.28) and (4.29) have been used to go from the first to the second line. Performing a similar calculation for $\widehat{\mathbf{v}}_e(t)$ leads to

$$\|\widehat{\mathbf{v}}_e(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \max \left(1, \sqrt{\frac{\mu}{4\nu}} \right) \left(\frac{2\pi}{c+d} \right)^{N/2} \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) e^{-t \frac{(\sqrt{\mu} + \sqrt{\nu})^2}{2}}, \quad (4.31)$$

so that, using again (4.9), we can retrieve (4.16) from (4.30) and (4.31) with

$$k := \frac{\max\left(1, \sqrt{\frac{\nu}{4\mu}}\right)}{(2\pi(c+d))^{N/2}} \quad \text{and} \quad k' := \frac{\max\left(1, \sqrt{\frac{\mu}{4\nu}}\right)}{(2\pi(c+d))^{N/2}}.$$

• *Problem satisfied by $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$.* Taking first $t = 0$ in (4.25) straightly recovers the initial datum $(\widehat{u}_{\infty,0}, \widehat{v}_{\infty,0})$ in (4.15). Then, notice that λ_+ defined in (4.24) and L defined in (4.12) are actually the same functions. Hence, by working on $\partial_t \mathbf{u}_\infty$ from the frequency domain, we have

$$\mathcal{F}[\partial_t \mathbf{u}_\infty] = \partial_t \widehat{\mathbf{u}}_\infty = \lambda_+ \times \widehat{\mathbf{u}}_\infty = L \times \widehat{\mathbf{u}}_\infty = \mathcal{F}[\mathcal{L} \mathbf{u}_\infty],$$

where the last equality precisely comes from the definition of the operator \mathcal{L} in (4.13). The same calculation for $\partial_t \mathbf{v}_\infty$ gives

$$\mathcal{F}[\partial_t \mathbf{v}_\infty] = \mathcal{F}[\mathcal{L} \mathbf{v}_\infty],$$

and thus, $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ solves (4.14). \square

We now proceed with the proof of Corollary 4.2 regarding the decay rate. We start by obtaining uniform controls on $\mathbf{u}(t)$ and $\mathbf{v}(t)$ for $t > 1$, specifically,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{\ell} \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}, \\ \|\mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{\ell}' \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

The approach used to derive (4.32) involves splitting high versus low frequencies of the solution and recognizing that only the low frequencies contribute algebraically at large times — refer to [40] and [3] for related phenomena. Given this observation, it is sufficient to note that $\mathbf{u}(t)$ and $\mathbf{v}(t)$ are bounded for $t \leq 1$ to establish (4.17) for all times.

Proof of Corollary 4.2. Recall that $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty$ and $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$. Referring to (4.16) we can write the following for $t > 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{\ell}_e \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}, \\ \|\mathbf{v}_e(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{\ell}'_e \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

where $\tilde{\ell}_e$ and $\tilde{\ell}'_e$ are positive constants depending on μ, ν and respectively k and k' — hence N, c, d, μ, ν .

We then shift to the consistent part of this proof that concerns the estimations of \mathbf{u}_∞ and \mathbf{v}_∞ . Based on the Taylor expansion of L near the origin, specifically,

$$L(\xi) = -\frac{c\nu + d\mu}{\mu + \nu} |\xi|^2 + o(|\xi|^2), \quad \text{as } |\xi| \rightarrow 0,$$

4.3. Asymptotic behavior of the Heat exchanger system

we can chose a small enough positive constant a (depending on L , hence c, d, μ, ν) so that

$$L(\xi) \leq -\frac{c\nu + d\mu}{2(\mu + \nu)}|\xi|^2, \quad \text{as soon as } |\xi| \leq a. \quad (4.34)$$

Basic calculus may be employed to show that L is radially decreasing. This enables to find a positive constant η (depending on L and a , and consequently on c, d, μ, ν) that guarantees

$$L(\xi) \leq -\eta, \quad \text{as soon as } |\xi| \geq a. \quad (4.35)$$

In the same manner as we demonstrated the vanishing of $(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)$, we use the Hausdorff-Young inequalities (4.9) to control $\|\mathbf{u}_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ and $\|\mathbf{v}_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ through estimates on $\|\widehat{\mathbf{u}}_\infty(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ and $\|\widehat{\mathbf{v}}_\infty(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Starting with \mathbf{u}_∞ , we have

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{u}}_\infty(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\leq \underbrace{\int_{|\xi| \leq a} |\widehat{\mathbf{u}}_\infty(t, \xi)| d\xi}_{\|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{low}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}} + \underbrace{\int_{|\xi| \geq a} |\widehat{\mathbf{u}}_\infty(t, \xi)| d\xi}_{\|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{high}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}} \\ &=: \|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{low}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{high}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

For the high frequencies, we express $\widehat{\mathbf{u}}_\infty$ from (4.25) with $\lambda_+ = L$. This yields

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{high}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2} \int_{|\xi| \geq a} \left| \left(1 - \frac{r}{\sqrt{s}}\right) \widehat{u}_0(\xi) + \frac{\nu}{\sqrt{s}} \widehat{v}_0(\xi) \right| e^{tL(\xi)} d\xi.$$

Next, using controls on L (4.35) and on $1 - r/\sqrt{s}$ and ν/\sqrt{s} (4.28), we eventually get

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{high}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq e^{-t\eta} \left(\|\widehat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \sqrt{\frac{\nu}{4\mu}} \|\widehat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) \quad (4.37)$$

which collapses exponentially fast. For the low frequencies, we similarly have

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{low}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2} \int_{|\xi| \leq a} \left| \left(1 - \frac{r}{\sqrt{s}}\right) \widehat{u}_0(\xi) + \frac{\nu}{\sqrt{s}} \widehat{v}_0(\xi) \right| e^{tL(\xi)} d\xi.$$

Using controls on L (4.34), on $1 - r/\sqrt{s}$ and ν/\sqrt{s} (4.28), and on \widehat{u}_0 and \widehat{v}_0 (4.29), we find:

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{u}}_\infty^{low}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} &\leq \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \sqrt{\frac{\nu}{4\mu}} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) \int_{|\xi| \leq a} e^{-t\frac{c\nu+d\mu}{2(\mu+\nu)}|\xi|^2} d\xi \\ &\leq \left(\frac{2\pi(\mu + \nu)}{c\nu + d\mu} \right)^{N/2} \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \sqrt{\frac{\nu}{4\mu}} \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finally, we combine (4.37) and (4.38) and use Hausdorff-Young inequalities (4.9) to control $\mathbf{u}_\infty(t)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. By returning to (4.36), we can follow the same approach to estimate

$\mathbf{v}_\infty(t)$ as well. As a consequence, we can identify two positive constants $\tilde{\ell}_\infty$ and $\tilde{\ell}'_\infty$, which depend on N, c, d, μ, ν , and satisfy the following inequalities for $t > 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{\ell}_\infty \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}, \\ \|\mathbf{v}_\infty(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \tilde{\ell}'_\infty \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right) / t^{N/2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

To complete the control of (\mathbf{u}, \mathbf{v}) for $t > 1$, we combine the estimations on $(\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e)$ (4.33) and $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ (4.39) to obtain (4.32) with

$$\tilde{\ell} := \tilde{\ell}_e + \tilde{\ell}_\infty \quad \text{and} \quad \tilde{\ell}' := \tilde{\ell}'_e + \tilde{\ell}'_\infty.$$

Now, for $t \leq 1$, the comparison principle ensures that (\mathbf{u}, \mathbf{v}) stays below the solution $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ to (4.6) with initial condition $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \equiv (\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})$. Notably, $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ actually does not depend on the space variable and therefore solves the ODE system

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\mathbf{u}} = -\mu \bar{\mathbf{u}} + \nu \bar{\mathbf{v}}, & t > 0, \\ \partial_t \bar{\mathbf{v}} = \mu \bar{\mathbf{u}} - \nu \bar{\mathbf{v}}, & t > 0. \end{cases}$$

Letting $\bar{\sigma} := \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$, we clearly have $\partial_t \bar{\sigma} \equiv 0$, so that,

$$\begin{aligned} \max(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq \max(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \leq \bar{\sigma} \equiv \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq (2\pi)^{-N} \left(\|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right), \end{aligned}$$

where we used the Hausdorff-Young inequalities (4.9) to obtain the last line. As a consequence, we have,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq (2\pi)^{-N} \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right), \\ \|\mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq (2\pi)^{-N} \left(\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|\hat{v}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

for all $t \leq 1$.

To complete the proof, we need to find suitable values for ℓ and ℓ' such that (4.17) satisfies both estimates (4.40) (for $t \leq 1$) and (4.32) (for $t > 1$). It can be shown that choosing

$$\ell := 2^{N/2} \max \left((2\pi)^{-N}, \tilde{\ell} \right) \quad \text{and} \quad \ell' := 2^{N/2} \max \left((2\pi)^{-N}, \tilde{\ell}' \right)$$

is the optimal solution, so that these values inherit the parameters dependency specified in Corollary 4.2. \square

4.4 Possible global existence

In this section we show the possible existence of global solutions for problem (4.1) when $N/2$ is larger than both $1/\alpha$ and κ/β , as stated in Theorem 4.3.

The proof involves constructing a global super-solution (\bar{u}, \bar{v}) for problem (4.1) that drives u and v to 0. More precisely, we try

$$\bar{u}(t, x) := F(t) \times \mathbf{u}(t, x) \quad \text{and} \quad \bar{v}(t, x) := F(t) \times \mathbf{v}(t, x), \quad (4.41)$$

where (\mathbf{u}, \mathbf{v}) is the solution to the pure diffusive Heat exchanger (4.6) with initial condition (u_0, v_0) , and F is a positive, bounded and continuously differentiable function to be determined. We then search for sufficient conditions on F that guarantee (\bar{u}, \bar{v}) is a global super-solution. This leads to (4.20) which requires the datum (u_0, v_0) to be small in some sense. Finally, the upper control $(u, v) \leq \sup(F) \times (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ retrieves (4.21).

Observe that our primary focus is on problem (4.1)| $_{\kappa=1}$ to prove Theorem 4.3. However, we also investigate the simpler case (4.1)| $_{\kappa=0}$ to obtain more accurate values for the constants m_0 , M and M' when $\kappa = 0$.

Proof of Theorem 4.3. Consider (\bar{u}, \bar{v}) as defined in (4.41). First, we set $F(0) = 1$ ensuring that (\bar{u}, \bar{v}) and (u, v) have the same initial data. Next, we require the following expressions to be positive for all $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\partial_t \bar{u} - c\Delta \bar{u} + \mu \bar{u} - \nu \bar{v} - \bar{u}^{1+\alpha} \quad \text{and} \quad \partial_t \bar{v} - d\Delta \bar{v} - \mu \bar{u} + \nu \bar{v} - \kappa \bar{v}^{1+\beta}.$$

This leads to

$$F' \geq F^{1+\alpha} \times \mathbf{u}^\alpha \quad \text{and} \quad F' \geq \kappa \times F^{1+\beta} \times \mathbf{v}^\beta. \quad (4.42)$$

Note that \mathbf{u} and \mathbf{v} can be replaced in (4.42) by their $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ -norms and any control from above of them. Therefore, with Corollary 4.2 providing uniform controls on \mathbf{u} and \mathbf{v} , we can say that satisfying the following inequalities is sufficient to recover (4.42):

$$F' \geq F^{1+\alpha} \times \left(\frac{\ell m}{(1+t)^{N/2}} \right)^\alpha \quad \text{and} \quad F' \geq \kappa \times F^{1+\beta} \times \left(\frac{\ell' m}{(1+t)^{N/2}} \right)^\beta. \quad (4.43)$$

Moving forward, we split the discussion into two parts based on whether κ is 0 or 1.

- *The case $\kappa = 0$.* This case is the simplest of the two since it is sufficient to ask

$$F' = F^{1+\alpha} \times \frac{(\ell m)^\alpha}{(1+t)^{N\alpha/2}} \quad (4.44)$$

if we require (4.43). By solving the ODE (4.44) with $F(0) = 1$, we obtain

$$F(t) = \left[\underbrace{1 - \frac{2\alpha(\ell m)^\alpha}{N\alpha - 2} \left(1 - \frac{1}{(1+t)^{(N\alpha/2)-1}} \right)}_{=: G_0(t)} \right]^{-1/\alpha} \quad (4.45)$$

It remains to ensure that F exists for all times which is permitted if and only if G_0 does not collide 0. To achieve this, we first need to assume that we are in the regime (4.19) to guarantee the vanishing of $1/(1+t)^{(N\alpha/2)-1}$ in (4.45). Then, because

$$\inf_{t \geq 0} [G_0(t)] = 1 - \frac{2\alpha(\ell m)^\alpha}{N\alpha - 2}, \quad (4.46)$$

it suffices to chose

$$m < m_0 := \left(\frac{N\alpha - 2}{2\alpha\ell^\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

to make G_0 positive and so (\bar{u}, \bar{v}) global.

To eventually retrieve the controls in (4.21), we combine (4.45)-(4.46) and (4.17) in Corollary 4.2, which lead us to set

$$M := \left(\frac{(N\alpha - 2)(\ell m)^\alpha}{N\alpha - 2 - 2\alpha(\ell m)^\alpha} \right)^{1/\alpha} \quad \text{and} \quad M' := \left(\frac{(N\alpha - 2)(\ell' m)^\alpha}{N\alpha - 2 - 2\alpha(\ell' m)^\alpha} \right)^{1/\alpha},$$

completing the proof in this case.

• *The case $\kappa = 1$.* Similar to the previous case, we aim to set an ODE on F , like (4.44), that would satisfy both ODIs in (4.43). With the loose assumption $m < 1$, it is clear that

$$\max \left[\left(\frac{m}{(1+t)^{N/2}} \right)^\alpha, \left(\frac{m}{(1+t)^{N/2}} \right)^\beta \right] \leq \left(\frac{m}{(1+t)^{N/2}} \right)^{\min(\alpha, \beta)}.$$

Moreover, (4.42) requires F' to be non-negative, so $F(t) \geq F(0) = 1$ implies

$$\max(F^{1+\alpha}, F^{1+\beta}) \leq F^{1+\max(\alpha, \beta)}.$$

As a result, it is sufficient to ask

$$F' = F^{1+\max(\alpha, \beta)} \times \max(\ell^\alpha, \ell'^\beta) \times \left(\frac{m}{(1+t)^{N/2}} \right)^{\min(\alpha, \beta)} \quad (4.47)$$

for F to satisfy (4.43). The remainder of the proof is nearly identical to the case $\kappa = 0$. Solving (4.47) yields

$$F(t) = \left[\underbrace{1 - \frac{2 \max(\alpha, \beta) \max(\ell^\alpha, \ell'^\beta) m^{\min(\alpha, \beta)}}{N \min(\alpha, \beta) - 2} \left(1 - \frac{1}{(1+t)^{(N \min(\alpha, \beta)/2) - 1}} \right)}_{=: G_1(t)} \right]^{-1/\max(\alpha, \beta)} \quad (4.48)$$

To ensure the global existence of F , we first need to be in the regime (4.19) to guarantee the vanishing of $1/(1+t)^{(N \min(\alpha, \beta)/2) - 1}$ in (4.48). Then, because

$$\inf_{t \geq 0} [G_1(t)] = 1 - \frac{2 \max(\alpha, \beta) \max(\ell^\alpha, \ell'^\beta) m^{\min(\alpha, \beta)}}{N \min(\alpha, \beta) - 2}, \quad (4.49)$$

it suffices to chose

$$m < m_0 := \min \left[1, \left(\frac{N \min(\alpha, \beta) - 2}{2 \max(\alpha, \beta) \max(\ell^\alpha, \ell'^\beta)} \right)^{1/\min(\alpha, \beta)} \right]$$

to make G_1 positive and thus (\bar{u}, \bar{v}) global.

It eventually remains to recover the controls in (4.21). To do this, we combine (4.48)-(4.49) and (4.17) in Corollary 4.2 which leads us to take

$$M := \left(\frac{(N \min(\alpha, \beta) - 2)(\ell m)^{\max(\alpha, \beta)}}{N \min(\alpha, \beta) - 2 - 2 \max(\alpha, \beta) \max(\ell^\alpha, \ell'^\beta) m^{\min(\alpha, \beta)}} \right)^{1/\max(\alpha, \beta)}$$

and

$$M' := \left(\frac{(N \min(\alpha, \beta) - 2)(\ell' m)^{\max(\alpha, \beta)}}{N \min(\alpha, \beta) - 2 - 2 \max(\alpha, \beta) \max(\ell^\alpha, \ell'^\beta) m^{\min(\alpha, \beta)}} \right)^{1/\max(\alpha, \beta)}$$

which concludes the proof of this second case. \square

4.5 Systematic blow-up

In this section, we tackle the proof of Theorem 4.4 which states the blowing-up of the non-negative solutions to (4.1) when at least one of the two $1/\alpha$ and κ/β is greater than $N/2$.

We cover both cases of $\kappa = 0$ and $\kappa = 1$ even though the first one would suffice. To do this we need the slight hypothesis $\alpha < 2/N$ which is transparent for the theorem assumptions, up to put κ before $u^{1+\alpha}$ rather than $v^{1+\beta}$ whenever $\beta < 2/N \leq \alpha$. Notice that u and v exchange their roles in this case.

Our method involves passing the solution (u, v) through a Gaussian blur whose intensity is adjusted via a positive parameter ε . As ε decreases, the blur increases. We denote the resulting blurred solution observed at point $x = 0$ as $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. We first observe that the blowing-up of $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ implies that of (u, v) . Then, we show that $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ satisfies an ODI system which ensures its blowing-up if ε is chosen sufficiently small.

Proof of Theorem 4.4. For technical reasons we start by adjusting the datum (u_0, v_0) to give it a specific shape. This step is non-limiting, thanks to the comparison principle. First, note that (by shifting time if necessary) we can assume that u_0 and v_0 are positive. As a consequence, there exists small enough $\eta, R > 0$ such that

$$\eta \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0, R)} \leq u_0 \quad \text{and} \quad \frac{\mu}{2\nu} \times \eta \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0, R)} \leq v_0$$

almost everywhere in \mathbb{R}^N . Therefore, we can assume without loss of generality that the datum (u_0, v_0) takes the form

$$(u_0, v_0) \equiv \left(\eta \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0, R)}, \frac{\mu}{2\nu} \times \eta \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0, R)} \right). \quad (4.50)$$

For $\varepsilon > 0$, we define the family of Gaussian kernels $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ for all $x \in \mathbb{R}^N$ as

$$\Phi_\varepsilon(x) := C(\varepsilon) \times e^{-\varepsilon|x|^2}, \quad (4.51)$$

where $C(\varepsilon) := (\varepsilon/\pi)^{N/2}$ ensures that $\|\Phi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$ for any $\varepsilon > 0$. By computing for $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda)\Phi_\varepsilon &= (4\varepsilon^2|x|^2 - 2\varepsilon N + \lambda)\Phi_\varepsilon \\ &\geq (-2\varepsilon N + \lambda)\Phi_\varepsilon, \end{aligned}$$

it becomes evident that

$$\Delta\Phi_\varepsilon \geq -\lambda\Phi_\varepsilon \quad (4.52)$$

if we choose $\lambda = 2N\varepsilon$, an equality that is maintained throughout the proof. Now we use Φ_ε to blur the solution (u, v) by convolution, and we denote the result evaluated at time t and point $x = 0$ as $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. More precisely,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{U}(t) := [\Phi_\varepsilon * u(t)](0) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(z)u(t, z)dz, \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}(t) := [\Phi_\varepsilon * v(t)](0) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(z)v(t, z)dz. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Since Φ_ε is chosen with unit mass, we have, while (u, v) exists in $(L^\infty(\mathbb{R}^N))^2$,

$$\mathcal{U}(t) + \mathcal{V}(t) \leq \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.54)$$

As a consequence of this inequality, the blowing-up of $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ yields that of (u, v) — possibly at an earlier time.

The objective is now to make $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ blow-up. Differentiating \mathcal{U} with respect to time yields (the parameters dependency is locally dropped for better visibility)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \Phi_\varepsilon * (c\Delta u - \mu u + \nu v + u^{1+\alpha}) \\ &= c[\Delta\Phi_\varepsilon * u] - \mu[\Phi_\varepsilon * u] + \nu[\Phi_\varepsilon * v] + [\Phi_\varepsilon * u^{1+\alpha}] \\ &\geq -c\lambda[\Phi_\varepsilon * u] - \mu[\Phi_\varepsilon * u] + \nu[\Phi_\varepsilon * v] + [\Phi_\varepsilon * u]^{1+\alpha} \\ &= -(\mu + c\lambda)\mathcal{U} + \nu\mathcal{V} + \mathcal{U}^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

where we use an integration by part to go from the first to the second line and (4.52) along Jensen inequality to go from the second to the third line. Applying the same approach to \mathcal{V} leads us the following ODI system

$$\begin{cases} \mathcal{U}' \geq -(\mu + c\lambda)\mathcal{U} + \nu\mathcal{V} + \mathcal{U}^{1+\alpha}, & t > 0, \\ \mathcal{V}' \geq \mu\mathcal{U} - (\nu + d\lambda)\mathcal{V} + \kappa\mathcal{V}^{1+\beta}, & t > 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

Due to its cooperative structure, the system (4.55) enjoys the comparison principle. As a result, \mathcal{U} and \mathcal{V} are respectively above U and V which solve the associated ODE system

$$\begin{cases} U' = -(\mu + c\lambda)U + \nu V + U^{1+\alpha}, & t > 0, \\ V' = \mu U - (\nu + d\lambda)V, & t > 0, \end{cases} \quad (4.56)$$

4.5. Systematic blow-up

as long as $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ and (U, V) start from the same initial datum, that is

$$(U(0), V(0)) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(z) u_0(z) dz, \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(z) v_0(z) dz \right) =: (U_0, V_0). \quad (4.57)$$

From this point, the rest of the demonstration consists in showing that (U, V) blows-up if the blur parameter ε ($= \lambda/2N$) is chosen sufficiently small. In Figure 55 below, we present the phase plane associated with ODE system (4.56), and we take this opportunity to introduce some notations that can be understood by looking at Figure 55. We begin by finding the isocline curves for system (4.56) that are

$$\begin{aligned} \{U' = 0\} &= \left\{ V = \frac{U}{\nu} (\mu + c\lambda - U^\alpha) \right\}, \\ \{V' = 0\} &= \left\{ V = \frac{\mu}{\nu + d\lambda} U \right\}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

These curves intersect each other at the equilibria $O := (0, 0)$ and $E_1 := (\chi, \frac{\mu}{\nu + d\lambda} \chi)$, where

$$\chi := \left(\mu + c\lambda - \frac{\mu\nu}{\nu + d\lambda} \right)^{1/\alpha}. \quad (4.59)$$

Next, we define $E_0 := (\mu^{1/\alpha}, 0)$, and for any $\theta \in [0, 1]$,

$$E_\theta := E_0 + \theta \overrightarrow{E_0 E_1} = \left(\mu^{1/\alpha} (1 - \theta) + \theta \chi, \frac{\mu}{\nu + d\lambda} \theta \chi \right).$$

We consider then the open set Ω which is the region above $\{V = 0\}$, below $\{V' = 0\}$, and on the right-hand side of the line $(E_0 E_1)$. More precisely,

$$\Omega := \{V > 0\} \cap \left\{ V < \frac{\mu}{\nu + d\lambda} U \right\} \cap \left\{ V > \frac{\mu\chi}{(\nu + d\lambda)(\chi - \mu^{1/\alpha})} (U - \mu^{1/\alpha}) \right\}. \quad (4.60)$$

Finally, we name \mathcal{P} and \mathcal{Q} the two components of vector field associated with ODE system (4.56), namely,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(U, V) &:= -(\mu + c\lambda)U + \nu V + U^{1+\alpha}, \\ \mathcal{Q}(U, V) &:= \mu U - (\nu + d\lambda)V, \end{aligned}$$

and we denote $\vec{\gamma}_\theta$ the evaluation of the field $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ at point E_θ .

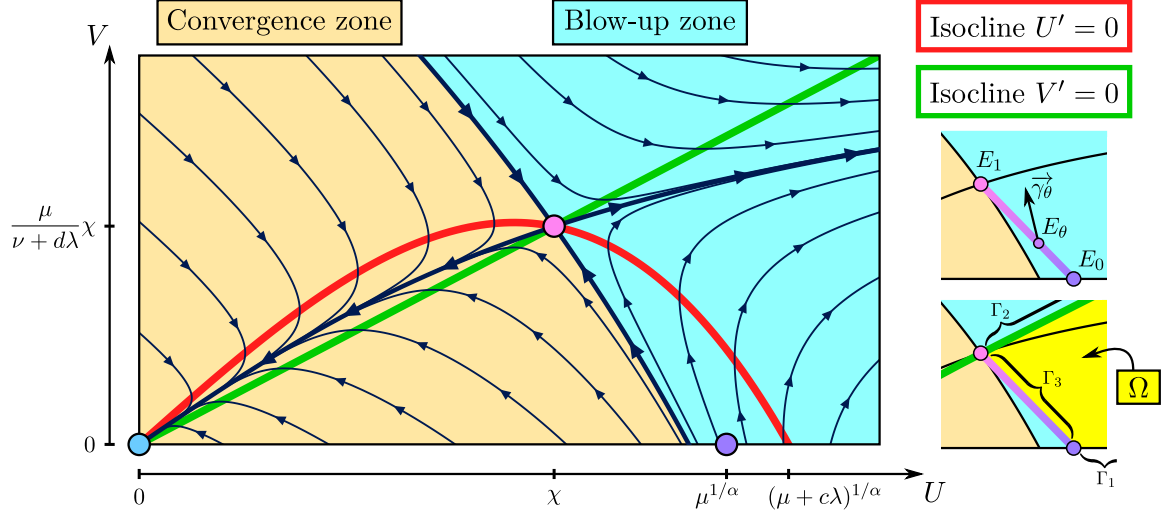


Figure 55 — Phase plane associated with ODE system (4.56). The equilibria are located at $O = (0,0) = \bullet$ and $E_1 = (\chi, \frac{\mu}{\nu+d\lambda}\chi) = \bullet$. The plane splits into two zones depending on whether the trajectories converge to O or blow-up in finite time. As λ approaches zero, the equilibrium E_1 moves towards O until they merge at the limit, and the blow-up zone “fills” the area below the isocline $\{V' = 0\}$, which is defined by $\{V' > 0\}$. To characterize the blow-up zone, we define $E_0 = (\mu^{1/\alpha}, 0) = \bullet$, and we show that all the points in the region Ω , defined as the intersection of the right-hand side of (E_0E_1) , the upper side of $\{V = 0\}$ and the lower side of $\{V' = 0\}$ are indeed in the blow-up zone provided that λ has been sufficiently reduced.

The continuation of our discussion is divided into three steps:

- (i) We show that by choosing $\lambda (= 2N\varepsilon)$ smaller, the region Ω remains stable under ODE system (4.56).
- (ii) We deduce that any solution to (4.56) starting at initial time in Ω blows-up in finite time.
- (iii) Finally, we find an $\varepsilon > 0$ that places (U_0, V_0) in Ω , leading to the blowing-up of (U, V) .

• *Step (i)*. To demonstrate that Ω is stable under the ODE system (4.56), we must establish that the vector field $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})|_{\partial\Omega}$ points inwards Ω . We decompose $\partial\Omega$ into $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, as illustrated in Figure 55:

$$\partial\Omega = \underbrace{\{U > \mu^{1/\alpha}, V = 0\}}_{\Gamma_1} \cup \underbrace{\{U > \chi, V' = 0\}}_{\Gamma_2} \cup \underbrace{[E_0E_1]}_{\Gamma_3}.$$

We observe that $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})|_{\Gamma_1}$ as well as $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})|_{\Gamma_2}$ both point in the correct direction since

- $\mathcal{Q} > 0$ along Γ_1 , and

4.5. Systematic blow-up

- $\mathcal{Q} = 0 < \mathcal{P}$ along Γ_2 .

To address the last portion of $\partial\Omega$, which is $\Gamma_3 = [E_0E_1]$, we define the matrices

$$\mathcal{M}_\theta := \begin{pmatrix} \vec{\gamma}_\theta & \overrightarrow{E_0E_1} \end{pmatrix},$$

and our goal is to prove $\det(\mathcal{M}_\theta) \geq 0$ for all $\theta \in [0, 1]$, indicating that $\vec{\gamma}_\theta$ points towards the right-hand side of $\overrightarrow{E_0E_1}$. Without going into the details of algebraic computations, we find

$$\det(\mathcal{M}_\theta) = \frac{\mu}{\nu + d\lambda} \chi \left[-(\mu + c\lambda) \left(\mu^{1/\alpha}(1 - \theta) + \theta\chi \right) + \frac{\theta\mu\nu}{\nu + d\lambda} \chi + \left(\mu^{1/\alpha}(1 - \theta) + \theta\chi \right)^{1+\alpha} \right] + \left(\mu^{1/\alpha} - \chi \right) \mu^{1+1/\alpha} (1 - \theta),$$

where we can verify that $\det(\mathcal{M}_1) = 0$, what is consistent with $\vec{\gamma}_1 = (0, 0)$ at the equilibrium E_1 . Now, differentiating $\det(\mathcal{M}_\theta)$ with respect to θ yields

$$\partial_\theta \det(\mathcal{M}_\theta) = \frac{\mu}{\nu + d\lambda} \chi \left[(\mu + c\lambda) \left(\mu^{1/\alpha} - \chi \right) + \frac{\mu\nu}{\nu + d\lambda} \chi - (1 + \alpha) \left(\mu^{1/\alpha} - \chi \right) \left(\mu^{1/\alpha} - \theta(\mu^{1/\alpha} - \chi) \right)^\alpha \right] - \mu^{1+1/\alpha} \left(\mu^{1/\alpha} - \chi \right),$$

and by considering that χ , defined in (4.59), vanishes as λ approaches 0, we have

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sup_{\theta \in [0, 1]} |\partial_\theta \det(\mathcal{M}_\theta) + \mu^{1+2/\alpha}| \right) = 0.$$

From this we deduce that there exists a positive λ_0 such that $\partial_\theta \det(\mathcal{M}_\theta) < 0$ for all $\lambda \in (0, \lambda_0)$ and all $\theta \in [0, 1]$. This implies

$$\det(\mathcal{M}_\theta) > \det(\mathcal{M}_1) = 0,$$

which concludes the step.

- *Step (ii).* Suppose we have $(U_0, V_0) \in \Omega$. Then, thanks to step (i), we know that (U, V) remains in Ω as long as it exists. Observe that $\mathcal{Q} > 0$ in Ω which causes V to increase. Since the set $\Omega \cap \{U' < 0\}$ does not contain any asymptotically stable trajectories, there exists a time $t_0 > 0$ for which (U, V) crosses the curve $\{U' = 0\}$. After this point,

$$(U, V) \in \Omega \cap \{U' > 0\}, \quad \text{for all } t \in (t_0, T),$$

where T denotes the lifetime of (U, V) . From the moment t_0 , U is therefore increasing. If U were bounded, it would converge, so would V in view of the phase plane, which is

impossible. Consequently, U is unbounded and we can find a time $t_1 > t_0$ that is large enough to perform

$$-(\mu + c\lambda)U + U^{1+\alpha} > \frac{1}{2}U^{1+\alpha}, \quad \text{for all } t \in (t_1, T).$$

Finally, by plugging the latter inequality in first line of (4.56), we find

$$U' > \frac{1}{2}U^{1+\alpha} + \nu V > \frac{1}{2}U^{1+\alpha}, \quad \text{for all } t \in (t_1, T),$$

from which the blowing-up of U is evident.

• *Step (iii).* The aim of this step is to show that (U_0, V_0) is in Ω if we reduce $\varepsilon (= \lambda/2N)$. To achieve this, we must show that (U_0, V_0) belongs to each set constituting the intersection Ω in (4.60).

At the beginning of the proof, we assume that the datum (u_0, v_0) takes the form given in (4.50), where we have $v_0 = \frac{\mu}{2\nu}u_0$. Observing the definition of (U_0, V_0) in (4.57) reveals that $V_0 = \frac{\mu}{2\nu}U_0$ as well. Therefore, on the phase plane of Figure 55, the datum (U_0, V_0) is located on the line $\{V = \frac{\mu}{2\nu}U\}$ which lies below the isocline $\{V' = 0\}$ if λ is chosen sufficiently small — check (4.58) for confirmation. As a result, there exists $\lambda_1 > 0$ such that

$$(U_0, V_0) \in \left\{ V < \frac{\mu}{\nu + d\lambda}U \right\}, \quad \text{for all } \lambda < \lambda_1. \quad (4.61)$$

Next, to place (U_0, V_0) on the right-hand side of (E_0E_1) , we must ensure that

$$V_0 > \frac{\mu\chi}{(\nu + d\lambda)(\chi - \mu^{1/\alpha})}(U_0 - \mu^{1/\alpha}). \quad (4.62)$$

Since χ vanishes as λ approaches to 0, we may check that the quantity $\frac{\mu\chi}{(\nu + d\lambda)(\chi - \mu^{1/\alpha})}$ is negative if λ is sufficiently small. Therefore, (4.62) is satisfied if

$$V_0 > \frac{\mu^{1+1/\alpha}\chi}{(\nu + d\lambda)(\mu^{1/\alpha} - \chi)}.$$

We can also remove $d\lambda$ and simply require

$$\begin{aligned} V_0 &> \frac{\mu^{1+1/\alpha}\chi}{\nu(\mu^{1/\alpha} - \chi)} \\ &= \frac{\mu}{\nu}\chi + o(\chi). \end{aligned}$$

By further reducing λ (and consequently χ), it is thus sufficient to have

$$\begin{aligned} V_0 &> \frac{2\mu}{\nu}\chi \\ &= \frac{2\mu}{\nu} \left[\mu + c\lambda - \frac{\mu\nu}{\nu + d\lambda} \right]^{1/\alpha} \\ &= \frac{2\mu}{\nu} \left[\left(c + \frac{d\mu}{\nu} \right) \lambda + o(\lambda) \right]^{1/\alpha} \end{aligned}$$

which we can simplified in

$$V_0 > \underbrace{\frac{2^{1+1/\alpha}\mu}{\nu} \left(c + \frac{d\mu}{\nu}\right)^{1/\alpha}}_{=:h} \lambda^{1/\alpha}. \quad (4.63)$$

Returning to the definition of V_0 in (4.57) with v_0 in (4.50) and Φ_ε in (4.51), the latter inequality (4.63) can be expressed as

$$\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^{N/2} \frac{\eta\mu}{2\nu} \int_{\mathcal{B}(0,R)} e^{-\varepsilon|z|^2} dz > h (2N\varepsilon)^{1/\alpha},$$

or with an adequate constant \tilde{h} that depends on $N, c, d, \mu, \nu, \alpha, \eta$,

$$\int_{\mathcal{B}(0,R)} e^{-\varepsilon|z|^2} dz > \tilde{h} \times \varepsilon^{(1/\alpha)-(N/2)}. \quad (4.64)$$

Now as ε approaches 0, the left-hand side of (4.64) converges towards the Lebesgue measure of the ball $\mathcal{B}(0, R)$ that is positive. Meanwhile, on the right-hand side, $\varepsilon^{(1/\alpha)-(N/2)}$ collapses since α has been chosen smaller than $2/N$. As a result, by taking $\varepsilon (= \lambda/2N)$ sufficiently small, we can achieve (4.64) and thus (4.62), meaning there exists $\lambda_2 > 0$ such that

$$(U_0, V_0) \in \left\{ V > \frac{\mu\chi}{(\nu + d\lambda)(\chi - \mu^{1/\alpha})} (U - \mu^{1/\alpha}) \right\}, \quad \text{for all } \lambda \in (0, \lambda_2). \quad (4.65)$$

Lastly, noting the positivity of V_0 and considering (4.60), (4.61) and (4.65), we can conclude that there exists a positive $\lambda (= 2N\varepsilon)$ for which $(U_0, V_0) \in \Omega$.

Gathering the elements of the proof from steps (i), (ii) and (iii), we demonstrated that we can find a positive ε for which (U, V) blows-up in finite time, consequently inducing the blowing-up of $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ and (u, v) . This concludes the proof. \square

Bibliography

- [1] N. ABATANGELO and E. VALDINOCI, *Getting Acquainted with the Fractional Laplacian*, in *Contemporary Research in Elliptic PDEs and Related Topics*, S. DIPIERRO, Ed., Springer International Publishing, Cham, 2019, pp. 1–105. DOI: 10.1007/978-3-030-18921-1_1.
- [2] E. AFFILI, *A Fisher-KPP model with a fast diffusion line in periodic media*, 2020. arXiv: 2009.14760.
- [3] M. ALFARO, *Fujita blow up phenomena and hair trigger effect: The role of dispersal tails*, Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire, vol. 34, no. 5, pp. 1309–1327, 2017. DOI: 10.1016/j.anihpc.2016.10.005.
- [4] M. ALFARO and C. CHAINAIS-HILLAIRET, *Long time behavior of the field-road diffusion model: An entropy method and a finite volume scheme*, 2023. arXiv: 2309.16242.
- [5] M. ALFARO and J. COVILLE, *Propagation phenomena in monostable integro-differential equations: Acceleration or not?* Journal of Differential Equations, vol. 263, no. 9, pp. 5727–5758, 2017. DOI: 10.1016/j.jde.2017.06.035.
- [6] M. ALFARO, R. DUCASSE, and S. TRÉTON, *The field-road diffusion model: Fundamental solution and asymptotic behavior*, Journal of Differential Equations, vol. 367, pp. 332–365, 2023. DOI: 10.1016/j.jde.2023.05.002.
- [7] M. ALFARO, F. HAMEL, and L. ROQUES, *Propagation or extinction in bistable equations: The non-monotone role of initial fragmentation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, vol. 17, no. 4, pp. 1460–1484, 2024. DOI: 10.3934/dcdss.2023165.
- [8] M. ALFARO and O. KAVIAN, *Blow-up phenomena for positive solutions of semilinear diffusion equations in a half-space: the influence of the dispersion kernel*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques, vol. 31, no. 5, pp. 1259–1286, 2022. DOI: 10.5802/afst.1718.
- [9] M. ALFARO, M. MOURRAGUI, and S. TRÉTON, *Bridging bulk and surface: An interacting particle system towards the field-road diffusion model*, (in preparation).
- [10] W. C. ALLEE, *Animal Aggregations: A Study in General Sociology*, 1931.

-
- [11] J. ALLWRIGHT, *Exact solutions and critical behaviour for a linear growth-diffusion equation on a time-dependent domain*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 65, no. 1, pp. 53–79, 2022. DOI: 10.1017/S0013091521000754.
- [12] J. ALLWRIGHT, *Reaction–diffusion on a time-dependent interval: Refining the notion of ‘critical length’*, Communications in Contemporary Mathematics, vol. 25, no. 09, p. 2250050, 2023. DOI: 10.1142/S021919972250050X.
- [13] L. ALMEIDA, A. LÉCULIER, and N. VAUCHELET, *Analysis of the rolling carpet strategy to eradicate an invasive species*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 55, no. 1, pp. 275–309, 2023. DOI: 10.1137/21M1427243.
- [14] D. G. ARONSON and H. F. WEINBERGER, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Advances in Mathematics, vol. 30, no. 1, pp. 33–76, 1978. DOI: 10.1016/0001-8708(78)90130-5.
- [15] R. BALDASSO, O. MENEZES, A. NEUMANN, and R. R. SOUZA, *Exclusion Process with Slow Boundary*, Journal of Statistical Physics, vol. 167, no. 5, pp. 1112–1142, 2017. DOI: 10.1007/s10955-017-1763-5.
- [16] O. BÉNICHOU, V. CALVEZ, N. MEUNIER, and R. VOITURIEZ, *Front acceleration by dynamic selection in Fisher population waves*, Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, vol. 86, no. 4 Pt 1, p. 041908, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.041908.
- [17] H. BERESTYCKI, A.-C. COULON, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. ROSSI, *Speed-up of reaction-diffusion fronts by a line of fast diffusion*, Séminaire Laurent Schwartz — EDP et applications, pp. 1–25, 2013/2014. DOI: 10.5802/slstedp.62.
- [18] H. BERESTYCKI, A.-C. COULON, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. ROSSI, *The effect of a line with nonlocal diffusion on Fisher-KPP propagation*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 25, no. 13, pp. 2519–2562, 2015. DOI: 10.1142/S0218202515400175.
- [19] H. BERESTYCKI, R. DUCASSE, and L. ROSSI, *Generalized principal eigenvalues for heterogeneous road–field systems*, Communications in Contemporary Mathematics, vol. 22, no. 01, p. 1950013, 2020. DOI: 10.1142/S0219199719500135.
- [20] H. BERESTYCKI, R. DUCASSE, and L. ROSSI, *Influence of a road on a population in an ecological niche facing climate change*, Journal of Mathematical Biology, vol. 81, no. 4, pp. 1059–1097, 2020. DOI: 10.1007/s00285-020-01537-3.
- [21] H. BERESTYCKI, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. ROSSI, *Fisher–KPP propagation in the presence of a line: Further effects*, Nonlinearity, vol. 26, no. 9, pp. 2623–2640, 2013. DOI: 10.1088/0951-7715/26/9/2623.
- [22] H. BERESTYCKI, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. ROSSI, *The influence of a line with fast diffusion on Fisher-KPP propagation*, Journal of Mathematical Biology, vol. 66, no. 4, pp. 743–766, 2013. DOI: 10.1007/s00285-012-0604-z.
-

- [23] H. BERESTYCKI, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. ROSSI, *The shape of expansion induced by a line with fast diffusion in Fisher-KPP equations*, Communications in Mathematical Physics, vol. 343, no. 1, pp. 207–232, 2016. DOI: 10.1007/s00220-015-2517-3.
- [24] H. BERESTYCKI, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. ROSSI, *Travelling waves, spreading and extinction for Fisher–KPP propagation driven by a line with fast diffusion*, Nonlinear Analysis, vol. 137, pp. 171–189, 2016. DOI: 10.1016/j.na.2016.01.023.
- [25] J. BERESTYCKI, É. BRUNET, and B. DERRIDA, *Exact solution and precise asymptotics of a Fisher–KPP type front*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol. 51, no. 3, p. 035 204, 2017. DOI: 10.1088/1751-8121/aa899f.
- [26] C. BERNARDIN, P. GONCALVES, and B. O. JIMENEZ, *Slow to fast infinitely extended reservoirs for the symmetric exclusion process with long jumps*, Markov Processes and Related Fields, vol. 25, no. 2, pp. 217–274, 2019.
- [27] P. BILLINGSLEY, *Probability and Measure* (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics), 3rd. Wiley, New York, 1995.
- [28] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures* (Wiley Series in Probability and Statistics), 2nd. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2013. DOI: 10.1002/9780470316962.
- [29] T. BODINEAU, B. DERRIDA, and J. L. LEBOWITZ, *A Diffusive System Driven by a Battery or by a Smoothly Varying Field*, Journal of Statistical Physics, vol. 140, no. 4, pp. 648–675, 2010. DOI: 10.1007/s10955-010-0012-y.
- [30] B. BOGOSEL, T. GILETTI, and A. TELLINI, *Propagation for KPP bulk-surface systems in a general cylindrical domain*, Nonlinear Analysis, vol. 213, p. 112 528, 2021. DOI: 10.1016/j.na.2021.112528.
- [31] E. BOUIN and V. CALVEZ, *Travelling waves for the cane toads equation with bounded traits*, Nonlinearity, vol. 27, no. 9, p. 2233, 2014. DOI: 10.1088/0951-7715/27/9/2233.
- [32] E. BOUIN, V. CALVEZ, N. MEUNIER, S. MIRRAHIMI, B. PERTHAME, G. RAOUL, and R. VOITURIEZ, *Invasion fronts with variable motility: Phenotype selection, spatial sorting and wave acceleration*, Comptes Rendus Mathématique, vol. 350, no. 15, pp. 761–766, 2012. DOI: 10.1016/j.crma.2012.09.010.
- [33] M. BRAMSON, *Convergence of Solutions of the Kolmogorov Equation to Travelling Waves*, Memoirs of the American Mathematical Society, 1983, vol. 44. DOI: 10.1090/memo/0285.
- [34] M. D. BRAMSON, *Maximal displacement of branching brownian motion*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 31, no. 5, pp. 531–581, 1978. DOI: 10.1002/cpa.3160310502.
- [35] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, 1983.

-
- [36] X. CABRÉ and J.-M. ROQUEJOFFRE, *The Influence of Fractional Diffusion in Fisher-KPP Equations*, Communications in Mathematical Physics, vol. 320, no. 3, pp. 679–722, 2013. DOI: 10.1007/s00220-013-1682-5.
- [37] V. CALVEZ, R. J. HAWKINS, N. MEUNIER, and R. VOITURIEZ, *Analysis of a Non-local Model for Spontaneous Cell Polarization*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 72, no. 2, pp. 594–622, 2012. DOI: 10.1137/11083486X.
- [38] X. CAO, X. BAI, and S. ZHENG, *Critical Fujita curve for a semilinear parabolic system with time-weighted sources*, Applicable Analysis, vol. 93, pp. 597–605, 2014. DOI: 10.1080/00036811.2013.794937.
- [39] R. CASTILLO and M. LOAYZA, *On the critical exponent for some semilinear reaction–diffusion systems on general domains*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 428, pp. 1117–1134, 2015. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.035.
- [40] E. CHASSEIGNE, M. CHAVES, and J. D. ROSSI, *Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 86, no. 3, pp. 271–291, 2006. DOI: 10.1016/j.matpur.2006.04.005.
- [41] F. COURCHAMP, L. BEREC, and J. GASCOIGNE, *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, 2008.
- [42] S. CUI, *Global behavior of solutions to a reaction-diffusion system*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 42, no. 3, pp. 351–379, 1998. DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00350-2.
- [43] D. CUSSEDDU, L. EDELSTEIN-KESHET, J. A. MACKENZIE, S. PORTET, and A. MADZVAMUSE, *A coupled bulk-surface model for cell polarisation*, Journal of Theoretical Biology, vol. 481, pp. 119–135, 2019. DOI: 10.1016/j.jtbi.2018.09.008.
- [44] A. A. M. CUYT, V. PETERSEN, B. VERDONK, H. WAADELAND, and W. B. JONES, *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [45] M. DAOUD and E. H. LAAMRI, *Fractional Laplacians : A short survey*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 2021. DOI: 10.3934/dcdss.2021027.
- [46] A. DE MASI, E. PRESUTTI, D. TSAGKAROGIANNIS, and M. E. VARES, *Current Reservoirs in the Simple Exclusion Process*, Journal of Statistical Physics, vol. 144, no. 6, pp. 1151–1170, 2011. DOI: 10.1007/s10955-011-0326-4.
- [47] A. DE MASI, E. PRESUTTI, D. TSAGKAROGIANNIS, and M. E. VARES, *Non-equilibrium Stationary States in the Symmetric Simple Exclusion with Births and Deaths*, Journal of Statistical Physics, vol. 147, no. 3, pp. 519–528, 2012. DOI: 10.1007/s10955-012-0481-2.
- [48] A. DE MASI, E. PRESUTTI, D. TSAGKAROGIANNIS, and M. E. VARES, *Truncated correlations in the stirring process with births and deaths*, Electronic Journal of Probability, vol. 17, pp. 1–35, 2012. DOI: 10.1214/EJP.v17-1734.
-

- [49] B. DELMAS, *Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population*, Mathématiques et sciences humaines. Mathematics and social sciences, no. 167, 2004. DOI: 10.4000/msh.2893.
- [50] K. DENG and H. A. LEVINE, *The Role of Critical Exponents in Blow-Up Theorems: The Sequel*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 243, no. 1, pp. 85–126, 2000. DOI: 10.1006/jmaa.1999.6663.
- [51] F. DICKSTEIN and M. LOAYZA, *Life span of solutions of a strongly coupled parabolic system*, Matemática Contemporânea, vol. 32, pp. 85–106, 2007.
- [52] L. DIETRICH, *Velocity enhancement of reaction-diffusion fronts by a line of fast diffusion*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 369, 2014. DOI: 10.1090/tran/6776.
- [53] L. DIETRICH, *Existence of Travelling Waves for a Reaction–Diffusion System with a Line of Fast Diffusion*, Applied Mathematics Research eXpress, vol. 2015, no. 2, pp. 204–252, 2015. DOI: 10.1093/amrx/abv002.
- [54] L. DIETRICH and J.-M. ROQUEJOFFRE, *Front propagation directed by a line of fast diffusion: Large diffusion and large time asymptotics*, Journal de l'École polytechnique — Mathématiques, vol. 4, pp. 141–176, 2017. DOI: 10.5802/jep.40.
- [55] S. DIPIERRO, E. P. LIPPI, C. SPORTELLI, and E. VALDINOCI, *The Neumann condition for the superposition of fractional Laplacians*, 2024. arXiv: 2402.05514.
- [56] S. DIPIERRO, K. PERERA, C. SPORTELLI, and E. VALDINOCI, *An existence theory for superposition operators of mixed order subject to jumping nonlinearities*, Nonlinearity, vol. 37, no. 5, p. 055 018, 2024. DOI: 10.1088/1361-6544/ad3793.
- [57] S. DIPIERRO and E. VALDINOCI, *Description of an ecological niche for a mixed local/nonlocal dispersal: An evolution equation and a new Neumann condition arising from the superposition of Brownian and Lévy processes*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, vol. 575, p. 126 052, 2021. DOI: 10.1016/j.physa.2021.126052.
- [58] M. D. DONSKER, *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Memoirs of the American Mathematical Society, no. 6, pp. 1–10, 1951.
- [59] Y. DU and Z. LIN, *Spreading-Vanishing Dichotomy in the Diffusive Logistic Model with a Free Boundary*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 42, no. 1, pp. 377–405, 2010. DOI: 10.1137/090771089.
- [60] R. DUCASSE, *Influence of the geometry on a field-road model: The case of a conical field*, Journal of the London Mathematical Society, vol. 97, no. 3, pp. 441–469, 2018. DOI: 10.1112/jlms.12114.
- [61] A. DUCROT and T. GILETTI, *Convergence to a pulsating travelling wave for an epidemic reaction-diffusion system with non-diffusive susceptible population*, Journal of Mathematical Biology, vol. 69, no. 3, pp. 533–552, 2014. DOI: 10.1007/s00285-013-0713-3.

-
- [62] H. EGGER, K. FELLNER, J. F. PIETSCHMANN, and B. Q. TANG, *Analysis and numerical solution of coupled volume-surface reaction-diffusion systems with application to cell biology*, Applied Mathematics and Computation, vol. 336, pp. 351–367, 2018. DOI: 10.1016/j.amc.2018.04.031.
- [63] M. ESCOBEDO and M. A. HERRERO, *Boundedness and Blow Up for a Semilinear Reaction-Diffusion System*, Journal of Differential Equations, vol. 89, no. 1, pp. 176–202, 1991. DOI: 10.1016/0022-0396(91)90118-S.
- [64] M. ESCOBEDO and H. A. LEVINE, *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 129, no. 1, pp. 47–100, 1995. DOI: 10.1007/BF00375126.
- [65] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations* (Graduate Studies in Mathematics), 2nd. American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 2010, vol. 19. DOI: 10.1090/gsm/019.
- [66] L. C. EVANS and R. F. GARIEPY, *Measure Theory and Fine Properties of Functions* (Textbooks in Mathematics), 2nd. CRC Press, Boca Raton (Florida), 2015.
- [67] P. C. FIFE and M. M. TANG, *Comparison principles for reaction-diffusion systems: Irregular comparison functions and applications to questions of stability and speed of propagation of disturbances*, Journal of Differential Equations, vol. 40, no. 2, pp. 168–185, 1981. DOI: 10.1016/0022-0396(81)90016-4.
- [68] S. FIGUEROA IGLESIAS and S. MIRRAHIMI, *Long Time Evolutionary Dynamics of Phenotypically Structured Populations in Time-Periodic Environments*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 50, no. 5, pp. 5537–5568, 2018. DOI: 10.1137/18M1175185.
- [69] S. FIGUEROA IGLESIAS and S. MIRRAHIMI, *Selection and mutation in a shifting and fluctuating environment*, Communications in Mathematical Sciences, vol. 19, no. 7, pp. 1761–1798, 2021. DOI: 10.4310/CMS.2021.v19.n7.a1.
- [70] M. FILA, H. A. LEVINE, and Y. UDA, *A Fujita-type global existence—global non-existence theorem for a system of reaction diffusion equations with differing diffusivities*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 17, no. 10, pp. 807–835, 1994. DOI: 10.1002/mma.1670171005.
- [71] A. T. FILICETTI, M. CODY, and S. E. NIELSEN, *Caribou Conservation: Restoring Trees on Seismic Lines in Alberta, Canada*, Forests, vol. 10, no. 2, p. 185, 2019. DOI: 10.3390/f10020185.
- [72] R. A. FISHER, *The Wave of Advance of Advantageous Genes*, Annals of Eugenics, vol. 7, no. 4, pp. 355–369, 1937. DOI: 10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x.
- [73] T. FRANCO, P. GONÇALVES, and A. NEUMANN, *Hydrodynamical behavior of symmetric exclusion with slow bonds*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, vol. 49, no. 2, pp. 402–427, 2013. DOI: 10.1214/11-AIHP445.
-

- [74] T. FRANCO, P. GONÇALVES, and A. NEUMANN, *Phase transition in equilibrium fluctuations of symmetric slowed exclusion*, Stochastic Processes and their Applications, vol. 123, no. 12, pp. 4156–4185, 2013. DOI: 10.1016/j.spa.2013.06.016.
- [75] T. FRANCO, P. GONÇALVES, and A. NEUMANN, *Phase transition of a heat equation with Robin’s boundary conditions and exclusion process*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 367, no. 9, pp. 6131–6158, 2015. DOI: 10.1090/S0002-9947-2014-06260-0.
- [76] T. FRANCO and M. TAVARES, *Hydrodynamic Limit for the SSEP with a Slow Membrane*, Journal of Statistical Physics, vol. 175, no. 2, pp. 233–268, 2019. DOI: 10.1007/s10955-019-02254-y.
- [77] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, 1964.
- [78] H. FUJITA, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, vol. 13, no. 2, pp. 109–124, 1966. DOI: 10.15083/00039873.
- [79] J. GARNIER, *Accelerating Solutions in Integro-Differential Equations*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2011. DOI: 10.1137/10080693X.
- [80] J. GARNIER, L. ROQUES, and F. HAMEL, *Success rate of a biological invasion in terms of the spatial distribution of the founding population*, Bulletin of Mathematical Biology, vol. 74, no. 2, pp. 453–473, 2012. DOI: 10.1007/s11538-011-9694-9.
- [81] M. GATTO, E. BERTUZZO, L. MARI, S. MICCOLI, L. CARRARO, R. CASAGRANDE, and A. RINALDO, *Spread and dynamics of the COVID-19 epidemic in Italy: Effects of emergency containment measures*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 117, no. 19, pp. 10484–10491, 2020. DOI: 10.1073/pnas.2004978117.
- [82] M.-H. GIGA, Y. GIGA, and J. SAAL, *Nonlinear Partial Differential Equations: Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [83] T. GILETTI, L. MONSAINGEON, and M. ZHOU, *A KPP road-field system with spatially periodic exchange terms*, Nonlinear Analysis, vol. 128, pp. 273–302, 2015. DOI: 10.1016/j.na.2015.07.021.
- [84] D. GRIFFEATH, *Frank Spitzer’s Pioneering Work on Interacting Particle Systems*, The Annals of Probability, vol. 21, no. 2, pp. 608–621, 1993. JSTOR: 2244666.
- [85] F. HAMEL, J. NOLEN, J.-M. ROQUEJOFFRE, and L. RYZHIK, *A short proof of the logarithmic Bramson correction in Fisher-KPP equations*, Networks and Heterogeneous Media, vol. 8, no. 1, pp. 275–289, 2013. DOI: 10.3934/nhm.2013.8.275.
- [86] F. HAMEL and L. ROQUES, *Fast propagation for KPP equations with slowly decaying initial conditions*, Journal of Differential Equations, vol. 249, no. 7, pp. 1726–1745, 2010. DOI: 10.1016/j.jde.2010.06.025.

-
- [87] K. HAYAKAWA, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proceedings of the Japan Academy, vol. 49, no. 7, pp. 503–505, 1973. DOI: 10.3792/pja/1195519254.
- [88] C. HENDERSON, *Propagation of solutions to the Fisher-KPP equation with slowly decaying initial data*, Nonlinearity, vol. 29, no. 11, p. 3215, 2016. DOI: 10.1088/0951-7715/29/11/3215.
- [89] P. HENRICI, *Applied and Computational Complex Analysis: Special Functions, Integral Transforms, Asymptotics, Continued Fractions*. John Wiley, 1977, vol. 2.
- [90] C. HERMITE and T. J. STIELTJES, *Correspondance d’Hermite et de Stieltjes*, Wentworth Press, 2019, vol. 2.
- [91] B. HU, *Blow-up Theories for Semilinear Parabolic Equations*. Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-18460-4.
- [92] M. JARA, *Hydrodynamic limit of particle systems with long jumps*, 2009. DOI: 10.48550/arXiv.0805.1326. arXiv: 0805.1326.
- [93] C. KIPNIS and C. LANDIM, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems* (Comprehensive Studies in Mathematics). Springer, New York, 1999, vol. 320. DOI: 10.1007/978-3-662-03752-2.
- [94] K. KOBAYASHI, T. SIRAO, and H. TANAKA, *On the growing up problem for semilinear heat equations*, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 29, no. 3, pp. 407–424, 1977. DOI: 10.2969/jmsj/02930407.
- [95] A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKII, and N. PISKUNOV, *Study of a diffusion equation that is related to the growth of a quality of matter, and its application to a biological problem*, Moscow University Mathematics Bulletin, vol. 1, pp. 1–26, 1937.
- [96] K. KUOCH, M. MOURRAGUI, and E. SAADA, *A boundary driven generalized contact process with exchange of particles: Hydrodynamics in infinite volume*, Stochastic Processes and their Applications, vol. 127, no. 1, pp. 135–178, 2017. DOI: 10.1016/j.spa.2016.06.004.
- [97] C. LANDIM, A. MILANÉS, and S. OLLA, *Stationary and Nonequilibrium Fluctuations in Boundary Driven Exclusion Processes*, Markov Processes and Related Fields, vol. 14, no. 2, pp. 165–184, 2008. DOI: 10.48550/arXiv.math/0608165.
- [98] C. LANDIM and K. TSUNODA, *Hydrostatics and dynamical large deviations for a reaction-diffusion model*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, vol. 54, no. 1, pp. 51–74, 2018. DOI: 10.1214/16-AIHP794.
- [99] C. LANDIM and S. VELASCO, *Dynamic and static large deviations of a one dimensional SSEP in weak contact with reservoirs*, 2023. arXiv: 2308.10895.
- [100] T. LEPOUTRE, N. MEUNIER, and N. MULLER, *Cell polarisation model: The 1D case*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 101, no. 2, pp. 152–171, 2014. DOI: 10.1016/j.matpur.2013.05.006.
-

- [101] H. A. LEVINE, *The Role of Critical Exponents in Blowup Theorems*, SIAM Review, vol. 32, no. 2, pp. 262–288, 1990. DOI: 10.1137/1032046.
- [102] T. M. LIGGETT, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes* (Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften). Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, vol. 324. DOI: 10.1007/978-3-662-03990-8.
- [103] T. M. LIGGETT, *Interacting Particle Systems* (Classics in Mathematics). Springer, Berlin, Heidelberg, 2005, vol. 2. DOI: 10.1007/b138374.
- [104] G. LU, *Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: A Cauchy Problem*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 24, no. 8, pp. 1193–1206, 1995. DOI: 10.1016/0362-546X(94)00190-S.
- [105] N. N. LUSIN, *Sur les propriétés des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 154, pp. 1688–1690, 1912.
- [106] J.-F. MALLORDY and J.-M. ROQUEJOFFRE, *A Parabolic Equation of the KPP Type in Higher Dimensions*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 26, no. 1, pp. 1–20, 1995. DOI: 10.1137/S0036141093246105.
- [107] T. R. MALTHUS, *An Essay on the Principle of Population: The 1803 Edition*. Yale University Press, 2018.
- [108] I. MAZARI, G. NADIN, and A. I. T. MARRERO, *Optimisation of the total population size with respect to the initial condition for semilinear parabolic equations: Two-scale expansions and symmetrisations*, Nonlinearity, vol. 34, no. 11, p. 7510, 2021. DOI: 10.1088/1361-6544/ac23b9.
- [109] H. W. MCKENZIE, E. H. MERRILL, R. J. SPITERI, and M. A. LEWIS, *How linear features alter predator movement and the functional response*, Interface Focus, vol. 2, no. 2, pp. 205–216, 2012. DOI: 10.1098/rsfs.2011.0086.
- [110] K. MOCHIZUKI and Q. HUANG, *Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Methods and Applications of Analysis, vol. 5, no. 2, pp. 109–124, 1998. DOI: 10.4310/maa.1998.v5.n2.a1.
- [111] M. MOURRAGUI, E. SAADA, and S. VELASCO, *Hydrodynamic and hydrostatic limit for a generalized contact process with mixed boundary conditions*, Electronic Journal of Probability, vol. 28, pp. 1–44, 2023. DOI: 10.1214/23-EJP1025.
- [112] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology. Vol. 1: An Introduction* (Interdisciplinary Applied Mathematics), 3rd. Springer, 2002, vol. 17. DOI: 10.1007/b98868.
- [113] J. D. MURRAY, *Mathematical Biology. Vol. 2: Spatial Models and Biomedical Applications* (Interdisciplinary Applied Mathematics), 3rd. Springer, 2003, vol. 18. DOI: 10.1007/b98869.
- [114] G. NADIN and A. I. T. MARRERO, *On the maximization problem for solutions of reaction-diffusion equations with respect to their initial data*, Mathematical Modelling of Natural Phenomena, vol. 15, p. 71, 2020. DOI: 10.1051/mmnp/2020030.

-
- [115] A. PAUTHIER, *Road-field reaction-diffusion system: A new threshold for long range exchanges*, 2015. arXiv: 1504.05437.
- [116] A. PAUTHIER, *The influence of nonlocal exchange terms on Fisher–KPP propagation driven by a line of fast diffusion*, Communications in Mathematical Sciences, vol. 14, no. 2, pp. 535–570, 2015. DOI: 10.4310/CMS.2016.v14.n2.a10.
- [117] A. PAUTHIER, *Uniform dynamics for Fisher-KPP propagation driven by a line of fast diffusion under a singular limit*, Nonlinearity, vol. 28, no. 11, pp. 3891–3920, 2015. DOI: 10.1088/0951-7715/28/11/3891.
- [118] G. PELTIER, *Accelerating invasions along an environmental gradient*, Journal of Differential Equations, vol. 268, no. 7, pp. 3299–3331, 2020. DOI: 10.1016/j.jde.2019.09.059.
- [119] G. PELTIER, *Analyse mathématique de modèles non-locaux en écologie évolutive*, Ph.D. dissertation, 2021.
- [120] J. PERRIN, *Les Atomes*. CNRS editions, 2014.
- [121] B. L. PHILLIPS, G. P. BROWN, J. K. WEBB, and R. SHINE, *Invasion and the evolution of speed in toads*, Nature, vol. 439, no. 7078, p. 803, 2006. DOI: 10.1038/439803a.
- [122] Y.-W. QI, *Global existence and uniqueness of a reaction–diffusion system via invariant solutions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 23, no. 10, pp. 1277–1291, 1994. DOI: 10.1016/0362-546X(94)90147-3.
- [123] P. QUITTNER and P. SOUPLET, *Superlinear Parabolic Problems*. Springer International Publishing, 2019.
- [124] J. RENCLAWOWICZ, *Global existence and blow-up for a completely coupled Fujita type system*, Applicationes Mathematicae, vol. 27, no. 2, pp. 203–218, 2000.
- [125] C. ROBINET, C.-E. IMBERT, J. ROUSSELET, D. SAUVARD, J. GARCIA, F. GOUSARD, and A. ROQUES, *Human-mediated long-distance jumps of the pine processionary moth in Europe*, Biological Invasions, vol. 14, no. 8, pp. 1557–1569, 2012. DOI: 10.1007/s10530-011-9979-9.
- [126] L. ROQUES, *Modèles de réaction-diffusion pour l’écologie spatiale : Avec exercices dirigés*, Éditions Quae, 2013.
- [127] L. ROQUES, F. PATOUT, O. BONNEFON, and G. MARTIN, *Adaptation in General Temporally Changing Environments*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 80, no. 6, pp. 2420–2447, 2020. DOI: 10.1137/20M1322893.
- [128] L. ROSSI, A. TELLINI, and E. VALDINOCI, *The effect on Fisher-KPP propagation in a cylinder with fast diffusion on the boundary*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 49, no. 6, pp. 4595–4624, 2017. DOI: 10.1137/17M1125388.
- [129] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe: cours et exercices*, 3rd. Dunod, 1998.
-

- [130] B. V. SCHMID, U. BÜNTGEN, W. R. EASTERDAY, C. GINZLER, L. WALLØE, B. BRAMANTI, and N. C. STENSETH, *Climate-driven introduction of the Black Death and successive plague reintroductions into Europe*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 112, no. 10, pp. 3020–3025, 2015. DOI: 10.1073/pnas.1412887112.
- [131] M. SHTICKZELLE, *Pierre-François Verhulst (1804-1849). La première découverte de la fonction logistique*, Population, vol. 36, no. 3, pp. 541–556, 1981. DOI: 10.2307/1532620.
- [132] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer Science & Business Media, 1994.
- [133] S. SNOUSSI and S. TAYACHI, *Global existence, asymptotic behavior and self-similar solutions for a class of semilinear parabolic systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 48, no. 1, pp. 13–35, 2002. DOI: 10.1016/S0362-546X(00)00170-X.
- [134] P. SOUPLET and S. TAYACHI, *Optimal condition for non-simultaneous blow-up in a reaction-diffusion system*, Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 56, no. 2, pp. 571–584, 2004. DOI: 10.2969/jmsj/1191418646.
- [135] M. R. SPIEGEL, *Theory and Problems of Laplace Transforms*. Schaum Publishing Co., New York, 1965.
- [136] F. SPITZER, *Interaction of Markov processes*, Advances in Mathematics, vol. 5, no. 2, pp. 246–290, 1970. DOI: 10.1016/0001-8708(70)90034-4.
- [137] H. SPOHN, *Long range correlations for stochastic lattice gases in a non-equilibrium steady state*, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 16, no. 18, p. 4275, 1983. DOI: 10.1088/0305-4470/16/18/029.
- [138] A. TELLINI, *Propagation speed in a strip bounded by a line with different diffusion*, Journal of Differential Equations, vol. 260, no. 7, pp. 5956–5986, 2016. DOI: 10.1016/j.jde.2015.12.028.
- [139] S. TRÉTON, *Blow-Up vs. Global Existence for a Fujita-Type Heat Exchanger System*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, pp. 2191–2212, 2024. DOI: 10.1137/23M1587440.
- [140] A. TYCHONOFF, *Théoremes d’unicité pour l’équation de la chaleur*, vol. 42, pp. 199–215, 1935.
- [141] K. UCHIYAMA, *The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time*, Journal of Mathematics of Kyoto University, vol. 18, no. 3, pp. 453–508, 1978. DOI: 10.1215/kjm/1250522506.
- [142] Y. UDA, *The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, vol. 46, no. 3, pp. 366–383, 1995. DOI: 10.1007/BF01003556.

- [143] L. WEILAND, T. GREEN-HARRISON, and S. KETCHESON, *The Influence of Seismic Lines on Wildfire Potential in the Boreal Region of Northern Alberta, Canada*, *Forests*, vol. 14, no. 8, p. 1574, 2023. DOI: 10.3390/f14081574.
- [144] F. B. WEISSLER, *Local Existence and Nonexistence for Semilinear Parabolic Equations in L^p* , *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 29, no. 1, pp. 79–102, 1980. JSTOR: 24892566.
- [145] F. B. WEISSLER, *Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation*, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 1, pp. 29–40, 1981. DOI: 10.1007/BF02761845.
- [146] J. YANG, *Fujita-type phenomenon of nonlinear coupled nonlocal diffusion system*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 428, pp. 227–237, 2015. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.011.
- [147] M. ZHANG, *Spreading speeds and pulsating fronts for a field-road model in a spatially periodic habitat*, *Journal of Differential Equations*, vol. 304, pp. 191–228, 2021. DOI: 10.1016/j.jde.2021.09.038.