Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

SOMMAIRE DU COURS :

Chapitre 1 : EDO

↳ On s'intéresse à l'évolution en temps de $\underset{\uparrow}{N}$ pop. $\overbrace{\text{sans structure d'espace.}}^{\text{à partir du CHAP 2...}}$

$N=1$ quasiment partout dans ce cours...

$$X = X(t) = \Big(\underbrace{X_1(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Taille} \\ 1^{\text{ère}}\text{ pop}}}, \dots\dots, \underbrace{X_N(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Taille } N^{\text{ème}} \\ \text{pop}}}\Big) \in \Omega \quad \text{ouvert de } \mathbb{R}^N.$$

↳ Évolution temporelle de X : $\dot{X} = f(t, X(t)), \quad t>0$

ou + simplement, $\dot{x} = f(t,x), \quad t>0 \quad (1)$

C'EST UNE EDO

↳ Notes: $\mathring{X} = X' = \frac{dX}{dt}$; f : "Fonction de croissance"

DÉF (EDO autonome) : On dit que (1) est **AUTONOME** si f ne dépend que de X, ie $f(t,X) \overset{\text{EN FAIT}}{=} f(X)$.

eg : $\mathring{X}(t) = (X(t))^2$ autonome $(f(X) = X^2)$

$\mathring{X}(t) = \sin(t).(X(t))^2$ pas autonome $(f(t,X) = \sin(t)X^2)$

↳ Dans la suite, toutes les EDO sont autonomes (analyse + facile) :

$$\mathring{X} = f(X), \quad t > 0 \qquad (2)$$

$X : (0,T) \to \Omega$ est solution de (2) si X différentiable et $\mathring{X}(t) = f(X(t)), \ \forall t \in (0,T)$.

↳ Note sur la régularité de X : "X hérite de la régularité de f" :

$$\begin{bmatrix} f \in \mathcal{C}(\Omega) \\ X \in \mathcal{C}(0,T) \end{bmatrix} \Rightarrow [f(X) \in \mathcal{C}(0,T)] \overset{(2)}{\Rightarrow} [\mathring{X} \in \mathcal{C}(0,T)] \Rightarrow [X \in \mathcal{C}^1(0,T)]$$

↳ Bootstrap de l'argument : $\begin{bmatrix} f \in \mathcal{C}^k \\ X \in \mathcal{C} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f \in \mathcal{C}^k \\ X \in \mathcal{C}^1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} f \in \mathcal{C}^k \\ X \in \mathcal{C}^k \end{bmatrix} \Rightarrow [X \in \mathcal{C}^{k+1}]$

1) CARACTÈRE BIEN POSÉ

- Pour que (2) soit bien posé ($\exists!$ solution), il faut la munir d'une donnée initiale. (En effet, (TFA), $X(t) = \underbrace{X(0)}_{\text{à fixer pour l'unicité}} + \int_{s=0}^{t} f(X(s))\, ds$)

$$(3) \begin{cases} \mathring{X} = f(X), & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \rightarrow \text{"Problème de Cauchy"}$$

<u>DÉF</u> (Solution maximale) : ODQ $(I, X) = ((0,T), X)$ est une solution maximale du pb de Cauchy (3) si $\underbrace{X \in \mathcal{C}^1(I)}_{(a)}$, $\underbrace{\dot{X} = f(X) \text{ sur } I}_{(b)}$, $\underbrace{X(0) = X_0}_{(c)}$ ET (maximalité)

si $(\tilde{I}, \tilde{X})$ vérifie aussi (a), (b), (c), alors <u>NÉCESSAIREMENT</u> $\tilde{I} \subseteq I$.

↳ T représente le temps de vie maximal de la solution.

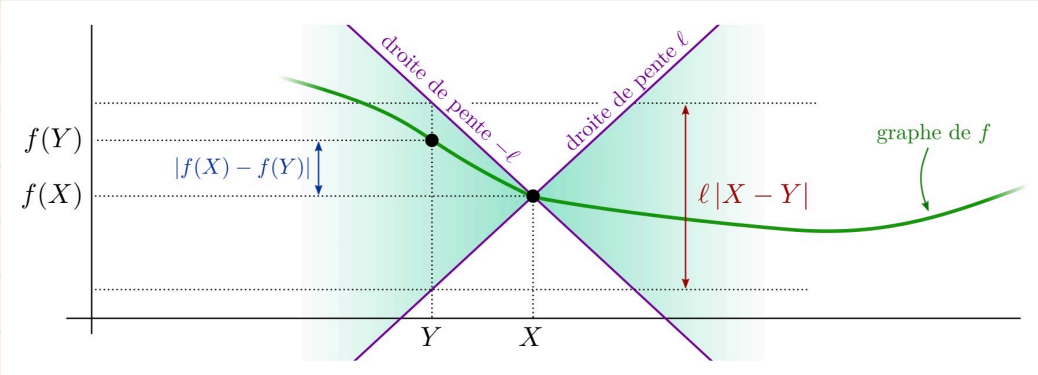
<u>DÉF</u> (f Lipschitzienne) : Soient $N \geq 1$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

ODQ f est Lipschitzienne (lip) par rapport à $\ell \geq 0$ ou simplement ℓ-lip si

$$|f(X) - f(Y)| \leq \ell\, |X - Y|, \quad \forall X, Y \in \Omega.$$

↳ <u>Rq</u> : $[f \ \ell\text{-lip}] \Rightarrow [f \ L\text{-lip}]$ si $L \geq \ell$

↳ <u>Rq</u> : $[f \ 0\text{-lip}] \Rightarrow [f \equiv c]$



<u>DÉF</u> (f localement lipschitzienne) Sous les hyp. précédentes, f est loc-lip s/ Ω si :

$\forall X_0 \in \Omega$, $\exists \ell_0 = \ell_0(X_0)$ et un voisinage ouvert V_0 de X_0 tq

$f|_{V_0} : V_0 \to \mathbb{R}^N$ est ℓ_0-lip.

↳ $[\text{lip}] \Rightarrow [\text{loc lip}]$ (CLAIR)

↳ eg : $f_1 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ 1-lip

$f_2 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array} \right.$ 1-lip

$f_3 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ pas lip mais loc-lip

$f_4 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ ni lip, ni loc-lip

$f_5 : \left| \begin{array}{l} [\varepsilon, \infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ lip $\forall \varepsilon > 0$

↳ CS pour être lip :

$$[f \in \mathcal{C}^1] \Rightarrow [f \text{ loc-lip}] \Rightarrow [f \in \mathcal{C}^0]$$

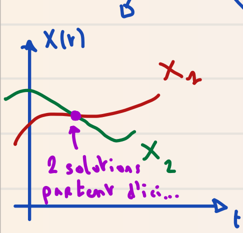
$$\left[\begin{array}{c} f \in \mathcal{C}^1 \\ \forall i \in [\![1;N]\!], \ \partial_{x_i} f \text{ bornés} \end{array} \right] \Rightarrow [f \text{ lip}]$$

TH (CAUCHY-LIPSCHITZ) : Soient $N \geq 1$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

Si f est loc-lip s/ Ω, alors $\forall X_0 \in \Omega$, le pb de Cauchy (3) admet une unique solution maximale (I, X) partant de la donnée X_0.

↳ Rq : • On dira par abus de langage que X est la solution du pb de Cauchy (et non (I, X)...)

• Sous les hyp. du th de CL, on a $f \in \mathcal{C}$ donc $X \in \mathcal{C}^1$.



• Les trajectoires des solutions ne se croisent pas ie si (I_1, X_1) et (I_2, X_2) sont deux solutions de (2), alors

$$[\exists t_0 \in I_1 \cap I_2 \text{ tq } X_1(t_0) = X_2(t_0)] \Rightarrow [(I_1, X_1) = (I_2, X_2)].$$

- En dimension $N=1$, le non-croisement des traj. donne un principe de comparaison :

$$[\underline{X}_0 \leq \overline{X}_0] \Rightarrow [\underline{X}(t) \leq \overline{X}(t),\ \forall t \in I]$$

IDÉE DE PREUVE DU TH DE CAUCHY-LIPSCHITZ :

↳ Existence : On passe au formalisme mild : on intègre l'EDO de $s=0$ à $s=t$:

$$X(t) = \underbrace{X(0) + \int_{s=0}^{t} f(X(s))\,ds}_{=:\ \phi(X)(t)}$$

Donc on cherche X tel que $X = \phi(X)$ ie un point fixe pour ϕ.

↳ Pour ça, on cherche à appliquer le TH du point fixe de Banach :

> TH (Pt fixe de Banach) : Soit $\mathcal{X}$ un Banach et $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.
> Si ϕ est contractante (i.e. ℓ-lip avec $\ell < 1$) alors
> $\exists ! X \in \mathcal{X}$ tq $x = \phi(x)$

↳ PREUVE : $\left(x_n := \underbrace{\phi \circ \phi \circ \phi \circ \dots \phi}_{n \text{ fois}}(x_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

↳ Il faut donc choisir le domaine de déf. $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}(0,T_0)$ (à définir...) de l'app. ϕ suff. restreint pour que ϕ soit contractante sur ce dernier.

↳ Puisque f a priori seulement loc lip, on ne peut pas espérer que ϕ soit contractante sur tout $\mathcal{C}(0,T)$

Pour cela, on prend, pour ε suff petit, $\mathcal{X} := \left\{ X \in \mathcal{C}(0,T_0) \text{ tq } \sup_{t \in (0,T_0)} |X(t) - X_0| < \varepsilon \right\}$

↳ Alors $(\mathcal{X}, d_\infty)$ où $d_\infty(X,Y) = \sup_{(0,T_0)} |X - Y|$ est un evn complet, et

$\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est contractante si on prend $T_0 := \dfrac{1}{\mathrm{Lip}(f ; X_0)}$.

↳ Par application du point fixe de Banach, on a $\exists!$ d'une solution (mild) $((0,T_0), X) \subset (\mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{C}^0(0,T_0))$

↳ En fait, on n'a pour le moment qu'une solution mild (en intégrant l'EDO on ne demande plus de différentiabilité sur X)

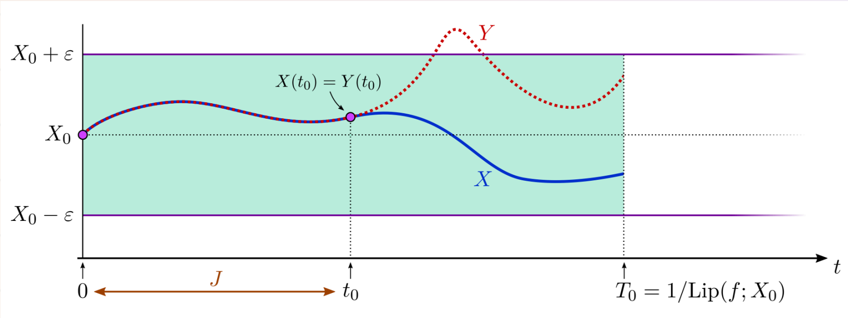
↳ Cela dit, dans le contexte des EDO, mild $\Longleftrightarrow$ classique

↳ Noter que cela n'est plus vrai en dimension infinie...

↳ Enfin, il faut montrer qu'on a bien l'unicité de notre solution sur tout $\mathcal{C}(0,T_0)$: il y a un risque d'avoir une autre sol dans $\mathcal{C}(0,T_0) \setminus \mathcal{X} \neq \phi$...

↳ Pour cela, on prend $X \in \mathcal{X}$ et $Y \in \mathcal{C}(0,T_0) \setminus \mathcal{X}$ deux solutions, et on note $t_0 := \sup\{t \in (0,T_0)$ tq $X(t) = Y(t)\}$.

En réappliquant le th du point fixe en partant de t_0 pour $X(t_0) = Y(t_0)$, on montre qu'en fait, $\exists\, \delta > 0$ petit tq $X = Y$ sur $(t_0, t_0 + \delta)$ ce qui contredit la maximalité de t_0...

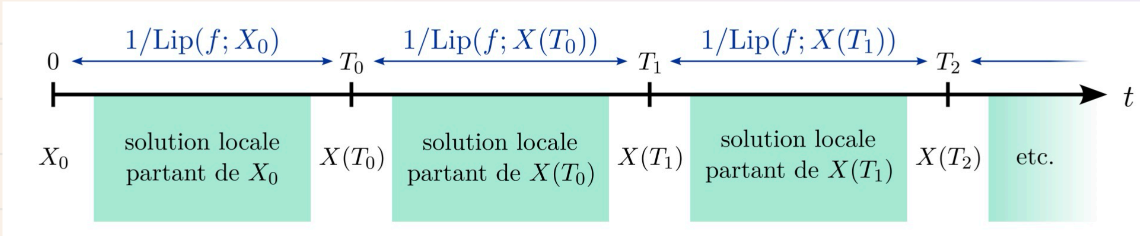


↳ Pour avoir la solution maximale, on itère le processus :

$$\begin{array}{ccccc} t=0 & & t = T_0 & & t = T_1 \\ X_0 & \xrightarrow[\text{de Banach}]{\text{Pt fixe}} & X(T_0) & \xrightarrow[\text{de Banach}]{\text{Pt fixe}} & X(T_1) \longrightarrow \text{ETC.} \end{array}$$

↳ On a une suite $(T_n)_n \nearrow$ strictement, donc ou bien $\begin{cases} T_n \xrightarrow{n} T < \infty \\ \text{ou bien } T_n \xrightarrow{n} +\infty \end{cases}$

↳ On définit alors $((0,T), X)$ la solution maximale obtenue.



□

TH (d'explosion en temps fini) : Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, sous les hyp du TH de Cauchy-Lip. si $((0,T),X)$ est l'unique solution maximale donnée par le TH, alors :

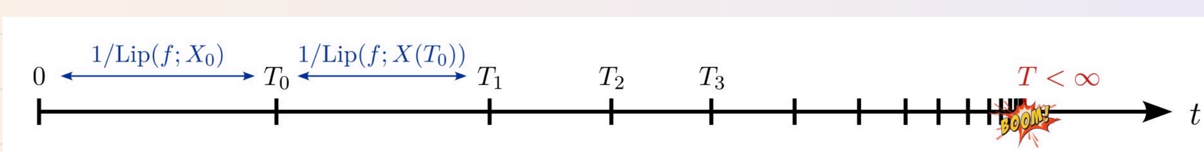
- ou bien $T < +\infty$ et dans ce cas $\lim_{t \to T^-} |X(t)| = +\infty$,
- ou bien $T = +\infty$.

↳ Idée de preuve : Si X n'a pas explosé en $t=T$, alors on réapplique le TH du point fixe pour montrer que la solution peut être prolongée, ce qui contredit la maximalité de T. □

TH (Cauchy-Lipschitz global) : Sous les hyp. du TH de Cauchy-Lipschitz, si de plus f est globalement lip, alors la solution maximale du pb de Cauchy (3) est en fait globale (ie. $T = +\infty$)

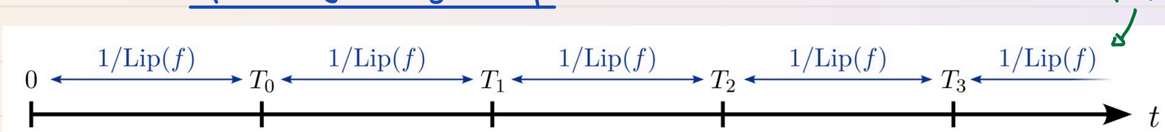
↳ Idée de preuve :

↳ Risque :



↳ Quand f est glob-lip :

(la série diverge!)



□

2) ÉTUDE DES SOLUTIONS (EDO SCALAIRES (ie $N=1$))

DÉF (Point d'équilibre) : ODQ $X_E \in \mathbb{R}$ est un équilibre de l'EDO (2) si $f(X_E) = 0$.

↳ Si $X_0 = X_E$, alors la solution est globale, et $X(t) = X_E$ FOREVER.

↳ Conséquence : Par Cauchy-Lip. les traj ne se croisent pas, donc les équilibres sont des barrières pour les solutions :

$$[X_0 < X_E] \Rightarrow [X < X_E \text{ s}/ I]$$
$$[X_0 > X_E] \Rightarrow [X > X_E \text{ s}/ I]$$

↳ Une application directe :

$$\begin{cases} \dot{X} = X(1-X), & t>0 \\ X(0) = X_0 \in (0,1). \end{cases}$$

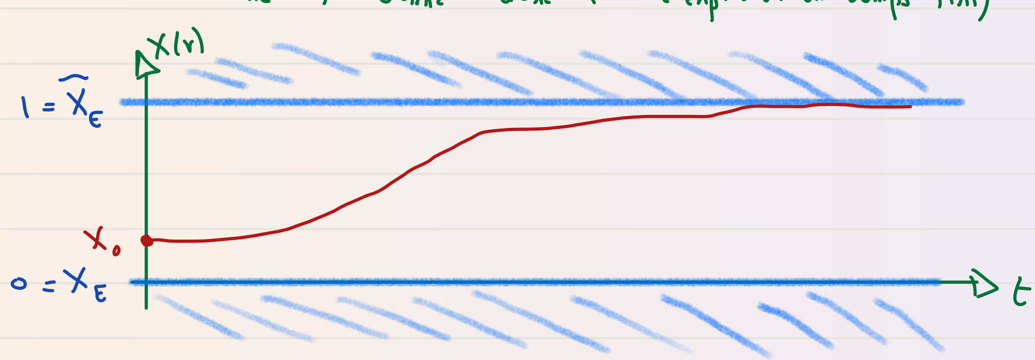
↳ On a $f(X) = X(1-X)$ est loc-lip (pas globalement car $-X^2$ de + en + pentu lorsque $|X| \to \infty$...)

↳ $\exists!$ sol. maximale $((0,T), X)$

↳ On $X_E = 0$ et $\tilde{X}_E = 1$ sont des équilibres.

↳ Comme $X_0 \in (0,1)$, on a $0 = X_E < X(t) < \tilde{X}_E = 1 \quad \forall t \in (0,T)$

↳ Donc X borné donc (TH d'explosion en temps fini) $T = +\infty$.



↳ Notez que si f est loc-lip et admet des équilibres isolés, alors f a un signe entre chaque paire d'équilibres successifs.

↳ Donc entre chaque paire d'éq successifs, | ou bien $X \nearrow$ et cv vers X_E^{DROITE}
| ou bien $X \searrow$ et cv vers X_E^{GAUCHE}.

DÉF (Stabilité d'un équilibre) :

- Si $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tq $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\exists \delta > 0$ tq $\big[\,|X_0 - X_E| < \delta\,\big] \Rightarrow \big[\,|X(t) - X_E| < \varepsilon \;\; \forall t\,\big]$

  ↳ ODQ X_E est STABLE (les solutions proches restent proches)

- Si X_E est stable et que (en plus), $\exists \eta > 0$ tq $\big[\,|X_0 - X_E| < \eta\,\big] \Rightarrow \big[\,X(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} X_E\,\big]$

  ↳ ODQ X_E est ASYMPTOTIQUEMENT STABLE. (les solutions proches convergent)

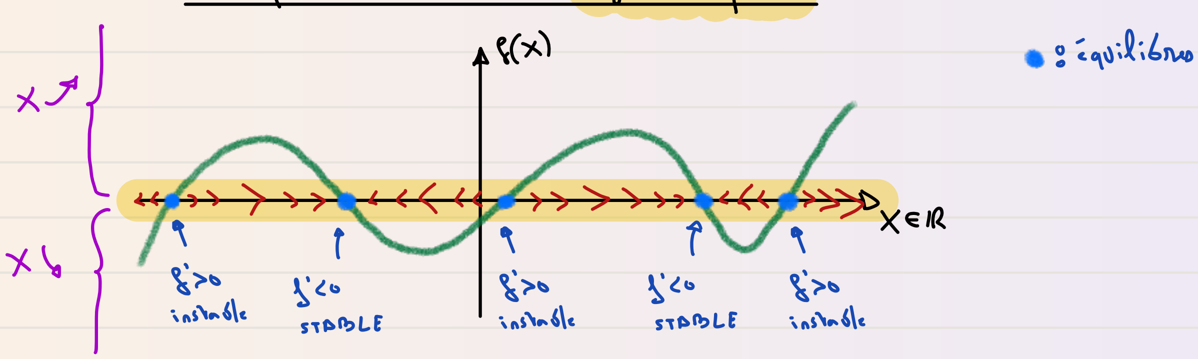
- Si X_E n'est pas stable, ODQ X_E est instable.

↳ CRITÈRE DE STABILITÉ EN DIMENSION N=1 :

$$\big[\,f'(X_E) > 0\,\big] \Rightarrow \big[\,X_E \text{ instable}\,\big]$$
$$\big[\,f'(X_E) < 0\,\big] \Rightarrow \big[\,X_E \text{ stable}\,\big]$$

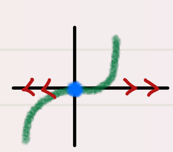
il faut imaginer les solutions comme des points glissants s/ la ligne de phases...

↳ Exemple visuel avec une ligne de phases :



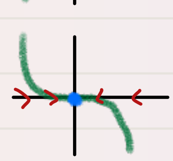
↳ Note : $f'(X_E) = 0$ ne donne aucune info. (cas dégénéré)

↳ eg : $\dot{X} = X^3$:



$X_E = 0$ est instable

$\dot{X} = -X^3$



$X_E = 0$ est STABLE

↳ Méthode de séparation des variables

(Fonctionne également pour $\dot{X} = f(X)\,g(t)$... (non autonome...)

↳ Si X_0 est un équilibre, alors $X \equiv X_0$ forever.

↳ Si X_0 n'est pas un équilibre, alors $f(X(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$, donc on peut diviser :

$$\frac{\dot{X}(t)}{f(X(t))} = 1 \qquad \text{on intègre :} \quad \int_{s=0}^{t} \frac{\dot{X}(s)}{f(X(s))}\,ds = t \quad (*)$$

↳ Imaginons qu'on connaisse une primitive de $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ qu'on note $\varphi(z)$.

↳ Dans ce cas, $\dfrac{\dot{X}(s)}{f(X(s))} = \dot{X}(s) \times \dfrac{1}{f(X(s))} = \dot{X}(s) \times \dot{\varphi}(X(s)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dérivée d'une composition}}}{=} \left(\varphi(X(s))\right)'$

↳ Alors en reprenant $(*)$, il vient :

$$\int_{s=0}^{t} \left(\varphi(X(s))\right)'\,ds = t \qquad \text{donc} \quad \varphi(X(t)) - \varphi(X_0) = t,$$

et, pour peu qu'on sache inverser φ : $X(t) = \varphi^{-1}\left(\varphi(X_0) + t\right)$.

↳ Exemples : (données $X_0 > 0$...)

- $\dot{X} = X \Rightarrow \displaystyle\int_{s=0}^{t} \frac{\dot{X}(s)}{X(s)}\,ds = t \Rightarrow \int_{s=0}^{t} \left(\log(X(s))\right)'\,ds = t$

  $\Rightarrow \log(X(t)) - \log(X_0) = t$

  $\Rightarrow X(t) = X_0 e^{t}$ (sol glob : pas de surprise, puisque $f : x \mapsto x$ glob-Lip)

- $\dot{X} = X^2 \Rightarrow \displaystyle\int_{s=0}^{t} \frac{\dot{X}(s)}{X^2(s)}\,ds = t \Rightarrow \int_{s=0}^{t} \left(-\frac{1}{X(s)}\right)'\,ds = t$

  $\Rightarrow \dfrac{1}{X_0} - \dfrac{1}{X(t)} = t \Rightarrow$

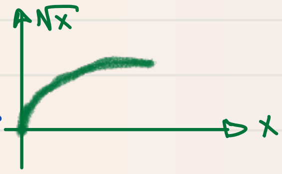
  $\Rightarrow X(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{X_0} - t}$ (explosion en temps fini)

• $\dot{X} = 2\sqrt{X} \Rightarrow \int_{s=0}^{t} \frac{\dot{X}(s)}{2\sqrt{X(s)}}\, ds = t \Rightarrow \int_{s=0}^{t} \left(\sqrt{X(s)}\right)' ds = t$

⚠ DANGER:

pas lip en $X=0$...

pente verticale en $X=0$!



$\Rightarrow \sqrt{X(t)} - \sqrt{X_0} = t$

$\Rightarrow X(t) = \left(\sqrt{X_0} + t\right)^2$ (5)

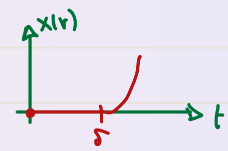
(A priori vrai $\forall X_0 \geq 0$???)

↳ Que se passe-t-il pour $X_0 = 0$ (le point où f n'est pas lip)

↳ $\sqrt{0} = 0$ donc 0 est un équilibre donc $X \equiv 0$ solution

↳ Par (5), $X(t) = t^2$ solution (on peut vérifier que $\dot{X} = 2X$...)

↳ En fait, $\forall \delta > 0$, $X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \in (0,\delta) \\ (t-\delta)^2 & \text{si } X > \delta \end{cases}$ =



est aussi solution!

$\Rightarrow$ On a une infinité (non dénombrable) de solutions!

↳ **MORALE:** f pas lip $\Rightarrow$ ⚠