Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

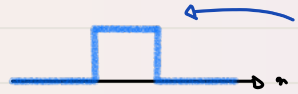
invasion systématique...

Suite et fin de la preuve du HTE :

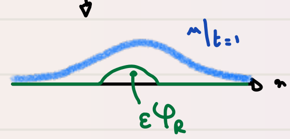
Rappel : Étape 1 : $\underline{m}_0^\varepsilon := \varepsilon \varphi_R \mathbb{1}_{(-R,R)}$ sous-solution

Étape 2 :

m_0 : pas sûr qu'on puisse passer $\varepsilon\varphi_R$ en dessous...



Attendre $t=1$ pour que m soit strictement positive



↳ $1 \geq m(t,x) \geq \underbrace{\underline{m}(t,x)}$ = la solution initiée à $\underline{m}_0^\varepsilon = \varepsilon\varphi_R \mathbb{1}_{(-R,R)}$

$t \mapsto \underline{m}(t,x) \nearrow$ $\forall x\in\mathbb{R}^N$ (coro du principe de comparaison)

Donc ($m(\cdot,x)$ est $\nearrow$ majorée (par 1)), $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $m(t,x) \xrightarrow{t\to\infty} p(x)$.

↳ La cv n'est que ponctuelle (pour le moment...)

ÉTAPE 3 : (La convergence vers p)

Formellement, en envoyant $t\to\infty$ dans l'équation $(\partial_t - \Delta - f)$, on est conduits à

$-\Delta p = f(p)$, mais la cv ponctuelle de l'étape 2 est insuffisante

pour passer proprement à la limite.

↳ C'est ici qu'entrent en jeu les ESTIMATIONS PARABOLIQUES

On travaille avec $t \in [1,2]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(t,x) := u(t+n, x)$

$$\underline{u}_n(t,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(x) \text{ (ponctuellement)}$$

On sait que u_n vérifie :

$$\partial_t \underline{u}_n - \Delta \underline{u}_n + \underbrace{(1-\underline{u}_n)}\underline{u}_n$$

on sait a priori que $1-\underline{u}_n \in [0,1]$ (c'est notamment borné)

↳ On peut dans ce cas utiliser l'estimation parabolique intérieure de type $W_p^{1,2}$ suivante (cf. Lieberman 96'):

Pour $p > 2$, $\exists\, c_R > 0$ (indépendant de n) tq $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\|\underline{u}_n\|_{W_p^{1,2}((1,2)\times B_R)} \leqslant C_R \|\underline{u}_n\|_{L^p((0,3)\times B_{2R})}}$$

Or $u_n \in [0,1)$ a priori, donc $C_R\|\underline{u}_n\|_{L^p((0,3)\times B_{2R})} \leqslant \underbrace{C_R \cdot 1 \cdot 3 \cdot |B_{2R}|}$

Qu'on s'empresse de renommer C_R !

Ainsi, $\|\underline{u}_n\|_{W_p^{1,2}\underbrace{((1,2)\times B_R)}_{=:\,\omega_R}} \leqslant C_R$ (35)

On utilise ensuite l'injection de Sobolev (cf. Lieberman ...):

$$W_p^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}) \quad \text{si } p > N \text{ et } \frac{\alpha}{2} := 1 - \frac{N}{p} \in (0,1),$$

injection continue

Donc, pour $p > N$, $\|\underline{u}_n\|_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\omega}_k)} \leqslant \underset{\substack{\text{constante} \\ \text{d'injection}}}{C} \times \|\underline{u}_n\|_{W_p^{1,2}(\omega_k)} \overset{(35)}{\leqslant} \underbrace{C \cdot c_k}_{\text{qu'on renomme } C_k \ldots}$

On a donc $\boxed{\|\underline{u}_n\|_{\mathcal{C}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\omega}_k)} \leqslant C_k}$ (indépendant de n...)

↳ Estimations paraboliques Schauder : Puisque $\partial_t \underline{u}_n - \Delta \underline{u}_n = f(\underline{u}_n)$:

↳ cf. Lieberman (et ω_k borné)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\|_{\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},\, 2+\alpha}(\bar{\omega}_k)} \leqslant C_k^{\text{SCHAUDER}} \Big(\|f(\underline{u}_n)\|_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\bar{\omega}_k)} + \underbrace{\|\underline{u}_n\|_{L^\infty}}_{\leqslant 1} \Big)$$

ici f est L-lip (localement)

on a $\|f(\underline{u}_n)\|_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\bar{\omega}_k)} \overset{\text{DÉF}}{=} \|f(\underline{u}_n)\|_{L^\infty(\bar{\omega}_k)} + [f(\underline{u}_n)]_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\bar{\omega}_k)}$

où $$[u]_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\bar{\omega}_k)} = \sup_{\substack{(t,x) \neq (s,y) \\ (t,x),(s,y) \in \bar{\omega}_k}} \frac{|u(t,x) - u(s,y)|}{|x-y|^\alpha + |t-s|^{\alpha/2}}$$

↳ 1er morceau : $\|f(\underline{u}_n)\|_{L^\infty(\omega)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(0,1)}$ (CLAIR)

↳ 2e morceau : $|f(\underline{u}_n(t,x)) - f(\underline{u}_n(s,y))| \leqslant L\,|\underline{u}_n(t,x) - \underline{u}_n(s,y)|$

÷ par $|x-y|^\alpha + |t-s|^{\alpha/2}$ puis passage au sup

$$[f(\underline{u}_n)]_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\bar{\omega}_k)} \leqslant L\,[\underline{u}_n]_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\bar{\omega}_k)}$$

↳ <u>Conclusion :</u> Quitte à gonfler C_k pour absorber $\|u_n\|_{L^\infty}$ et $\|g\|_{L^\infty}$ (bornés), on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\|_{\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},\, 2+\alpha}(\overline{\omega_k})} \leqslant C_k$$

↳ Or puisque $\overline{\omega_k}$ est borné,

$\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},\, 2+\alpha}(\overline{\omega_k}) \hookrightarrow \mathcal{C}^{1,2}(\omega_k)$ et l'injection est compacte !

↳ ie une suite bornée à gauche admet une sous-suite cv à droite.

Donc $\exists$ une sous-suite $(u_{n_i})_i \subset \mathcal{C}^{1,2}(\omega_k)$ et $u_\infty \in \mathcal{C}$

$$u_{n_i} \xrightarrow{i \to \infty} \overline{u_\infty} \quad \text{dans } \mathcal{C}^{1,2}$$

$$\left(\|u\|_{\mathcal{C}^{1,2}(Q)} = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|\Delta u\|_\infty + \|u_t\|_\infty \right)$$

↳ Or la cv $\mathcal{C}^{1,2} \Rightarrow$ cv $L^\infty \Rightarrow$ cv $\underbrace{\text{ponctuelle}}_{(PW)}$ donc $\omega\text{-lim-}\mathcal{C}^{1,2} \subseteq \omega\text{-lim-}PW$

Et $\exists!$ limite ponctuelle pour u_n qui est p !

Ainsi, $\emptyset \neq \omega\text{-lim-}\mathcal{C}^{1,2} \subset \omega\text{-lim-}PW = \{p\}$

Donc $\omega\text{-lim-}\mathcal{C}^{1,2} = \{p\}$

Donc $u_n \xrightarrow{n \to \infty} p$ dans $\mathcal{C}^{1,2}(\omega_k)$ (sans besoin d'extraction)

↳ En prenant k de plus en plus grand on capture finalement

$u_n \xrightarrow{n \to \infty}$ dans $\mathcal{C}^{1,2}_{loc}(\omega_k)$ ☺

↳ En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$$\partial_t \underline{u}_n(t,x) \xrightarrow{n\to\infty} \partial_t \rho(x) = 0$$

$$\Delta \underline{u}_n(t,x) \xrightarrow{n\to\infty} \Delta \rho(x),$$

et donc (on peut passer à la limite dans l'équation) :

ρ vérifie l'équation elliptique non-linéaire

$$-\Delta \rho = f(\rho) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N.$$

ÉTAPE 4 : $(\rho(x) \equiv 1$: LA FIN$)$

On sait que $\begin{cases} -\Delta \rho = f(\rho) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ 0 < \rho \leq 1. \end{cases}$

On veut MQ $\rho \equiv 1$.

Supposons par l'absurde que $\rho \not\equiv 1$.

Alors, quitte à translater, $0 < \rho(0) < 1$.

↳ Reprenons φ_R la fonction propre du Laplacien Dirichlet sur $B(0,R)$.

On a

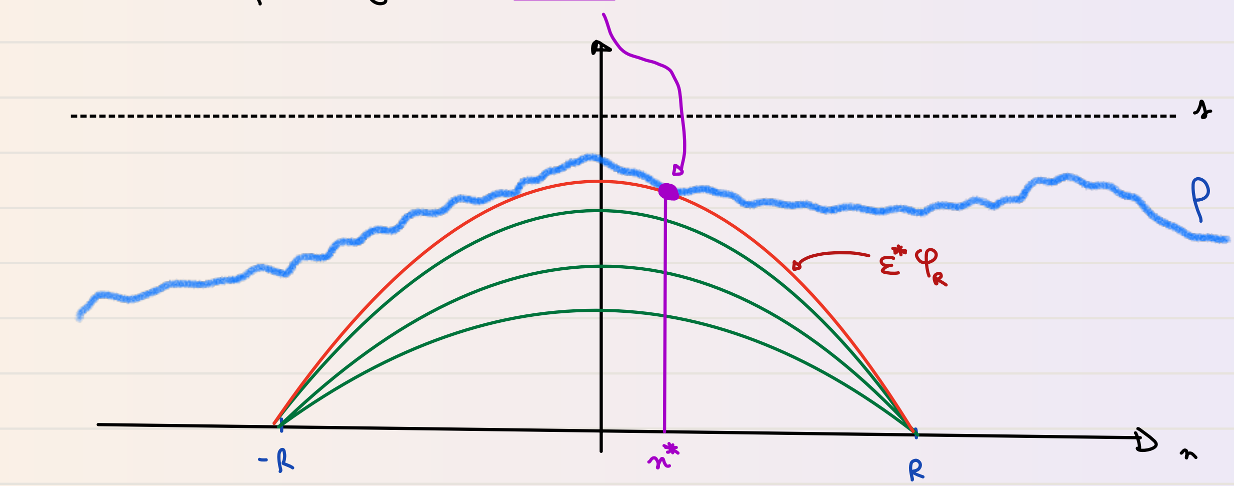
$$-\Delta(\varepsilon\varphi_R) - f(\varepsilon\varphi_R) = \varepsilon\varphi_R\left(\lambda_R - r + r\varepsilon\varphi_R\right)$$

$$\leq \varepsilon\varphi_R\Big(\underbrace{\lambda_R}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0} - r\big(\underbrace{1-\rho(0)}_{>0 \text{ puisque } 0<\rho(0)<1\ldots}\big)\Big) \quad \text{si } 0<\varepsilon<\rho(0)$$

(puisque $\varphi_R > 0$ et $\|\varphi_R\|_\infty = 1$)

$$< 0 \quad \text{si } R>0 \text{ fixé suff. grand.} \qquad (36)$$

↳ On "pousse jusqu'à toucher" :



On prend ε^* le premier ε pour lequel $\varepsilon^*\varphi_R$ touche ρ :

$$\varepsilon^* := \sup\left\{\varepsilon>0 \text{ tq } \forall x\in B_R,\ \varepsilon\varphi_R(x)\leq\rho(x)\right\}$$

↳ Bien déf et $0<\varepsilon^*\leq\rho(0)<1$

↳ car non-vide et majoré par $\rho(0)$...

↳ Là on fait un argument de type principe du maximum:

Au point de contact qu'on note $x^* \notin \partial B_R$ (puisque $\varphi_R|_{\partial B_R} \equiv 0$ ...), On a

Car $\varepsilon\varphi_R$ sous sol du pb elliptique $\forall \varepsilon \in (0, p(0))$ si R suff grand

$$0 \geqslant \Delta\left(\varepsilon^*\varphi_R - p\right)(x^*) \overset{(36)}{>} -g\left(\varepsilon^*\varphi_R(x^*)\right) + \underbrace{g\left(p(x^*)\right)}_{p \text{ vérifie l'eq elliptique}}$$

Puisque $x \mapsto \varepsilon^*\varphi_R(x) - p(x)$ est négatif et atteint son maximum (nul) en x^*

$= 0$ puisque $p(x^*) = \varepsilon^*\varphi_R(x^*)$.

Ce qui est absurde.

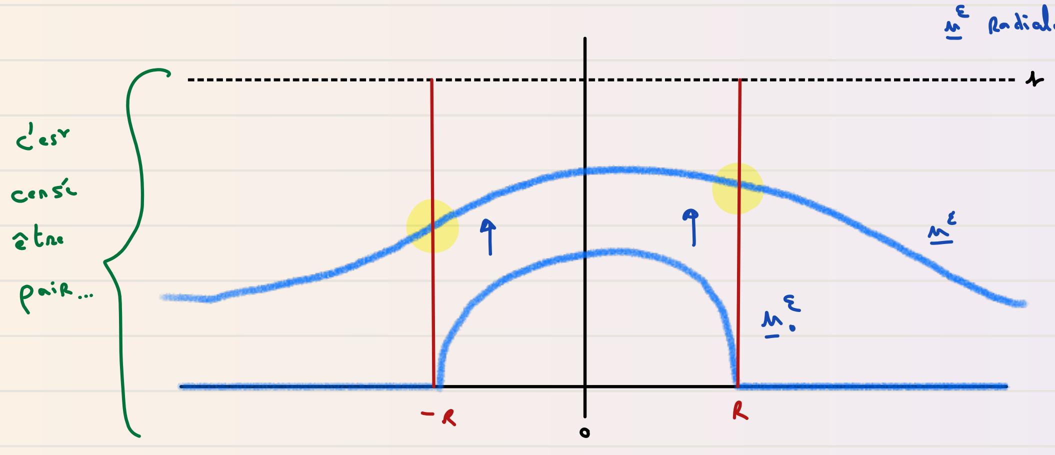
Donc $p \equiv 1$ et $1 \geqslant u(t,x) \geqslant \underline{u}^\varepsilon(t,x) \xrightarrow{t\to\infty} p(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

invariance des eq par rotation $y = Rx$ $\forall R \in SO_N(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ Donc $u(t,\cdot) \xrightarrow{t\to\infty} 1$ PW a priori, mais $[\underline{u}_0^\varepsilon$ Radiale$] \Rightarrow [\underline{u}^\varepsilon$ Radiale$]$

donc $[\underline{u}^\varepsilon$ cv ponctuellement$] \Rightarrow [\underline{u}^\varepsilon$ cv aux bords$] \Rightarrow [\underline{u}^\varepsilon$ cv uniformément$]$

$\underline{u}^\varepsilon$ Radiale



Si on cv bien ici alors on cv unif. dans le compact $[-R;R]$.

CONCLUSION : $u(t,\cdot) \xrightarrow{t\to\infty} 1$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. $\square$