Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

Suite des outils d'étude qualitative des EDO :

↳ Principe de comparaison

DÉF (sur/sous solutions) : Supposons que $N=1$.

- On dit que $\underline{X} \in \mathcal{C}^1(0,\underline{T})$ est une sous-solution de l'EDO (2) si

$$\frac{d}{dt}\underline{X}(t) \leq f(\underline{X}(t)) \qquad \forall t \in (0,\underline{T})$$

- On dit que $\overline{X} \in \mathcal{C}^1(0,\overline{T})$ est une sur-solution de l'EDO (2) si

$$\frac{d}{dt}\overline{X}(t) \geq f(\overline{X}(t)) \qquad \forall t \in (0,\overline{T})$$

↳ Rq : • Une solution est à la fois sur- et sous-solution (c'est même équivalent !)

• On peut qualifier les sur- et sous-solutions de "STRICTES" si on a des inégalités STRICTES.

PROPO (Principe de comparaison EDO) Supposons $N=1$, f localement lipschitzienne, alors $\forall \underline{X} \in \mathcal{C}^1(0,\underline{T})$ et $\overline{X} \in \mathcal{C}^1(0,\overline{T})$,

$$\left[\begin{array}{l} \underline{X} \text{ sous-sol de } (2) \\ \overline{X} \text{ sur-sol de } (2) \\ \underline{X}(0) \leq \overline{X}(0) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\underline{X}(t) \leq \overline{X}(t), \quad \forall t \in (0, \min(\underline{T};\overline{T}))\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{X} \text{ sous-sol de } (2) \\ \bar{X} \text{ sur-sol de } (2) \\ \underline{X}(0) < \bar{X}(0) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\underline{X}(t) < \bar{X}(t), \quad \forall t \in (0, \min(\underline{T}; \bar{T}))\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{X} \text{ sous-sol STRICTE de } (2) \\ \bar{X} \text{ sur-sol STRICTE de } (2) \\ \underline{X}(0) \leq \bar{X}(0) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\underline{X}(t) < \bar{X}(t), \quad \forall t \in (0, \min(\underline{T}; \bar{T}))\right]$$

ou seulement l'un des deux...

↳ Exemple/Exercice : En utilisant le fait que $\log(1+a) < a \ \forall a > 0$, montrer que les solutions positives de $\dot{X} = \log(1+X)$ sont globales.

3) BESTIAIRE D'EDO SCALAIRES (ie $N=1$ (1 seule espèce))

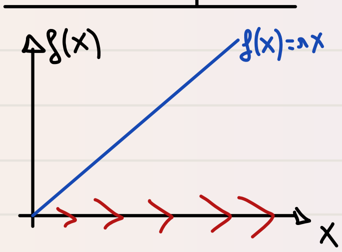
a) Le modèle de MALTHUS (1798)

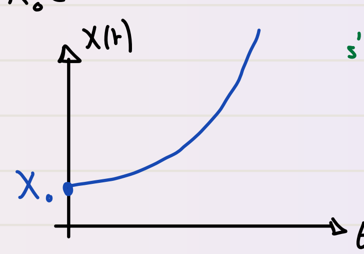
↳ Le plus simple : Croissance linéaire de la population

$$\dot{X} = rX \qquad \left(\text{EN FAIT } \ \text{birth} \times X - \text{death} \times X = \underbrace{(\text{birth} - \text{death})}_{=:r} X\right)$$

son signe nous dit si on survit ou si on s'éteint.

Solution explicites : $X(t) = X_0 e^{rt}$





↳ Inconvénient : Devient TRÈS GRAND, TRÈS VITE.....

b) Le modèle de VERHULST (1838) (Logistique)

→ Il faut prendre en compte la compétition intraspécifique pour l'espace et/ou les ressources !

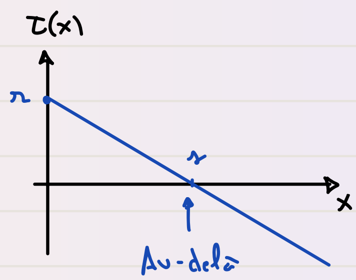
↳ ie entre individus de la même espèce...

↳ Pour ça, une quantité d'intérêt :

$$\tau_f(X) := \frac{f(X)}{X}$$ le taux de croissance individuel

- Pour Malthus, $\tau_{MALTHUS}(X) = r$ indépendant de la taille de la population.
- Pour tenir compte de la compétition, il faut que $\tau_f \searrow$ lorsque la taille de la pop $\nearrow$.

$$\tau_{VERHULST}(X) = r(1 - X) =$$



Au-delà de cette densité le taux de croissance devient négatif → TROP DE POP = †

Croissance associée :

$$\dot{X} = rX(1-X) = \underbrace{rX}_{\text{croissance intrinsèque}} - \underbrace{rX^2}_{\text{Terme de compétition}}$$

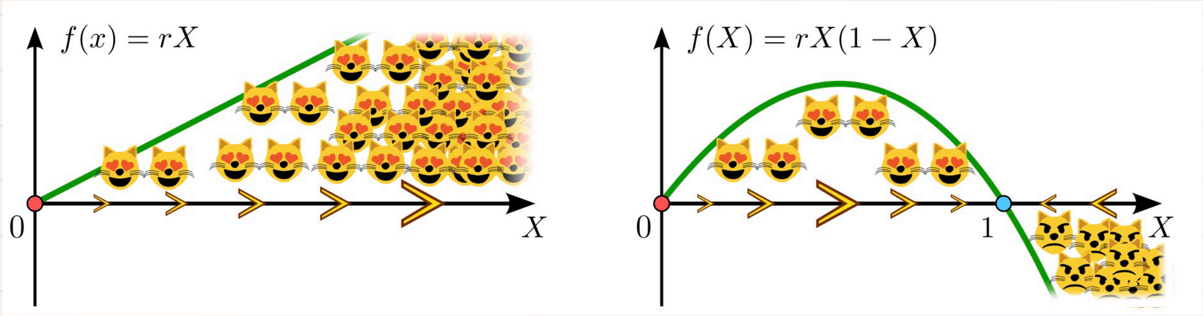
Le modèle est non-linéaire.

↳ Équilibres : 0 (linéairement instable)
1 (linéairement stable)

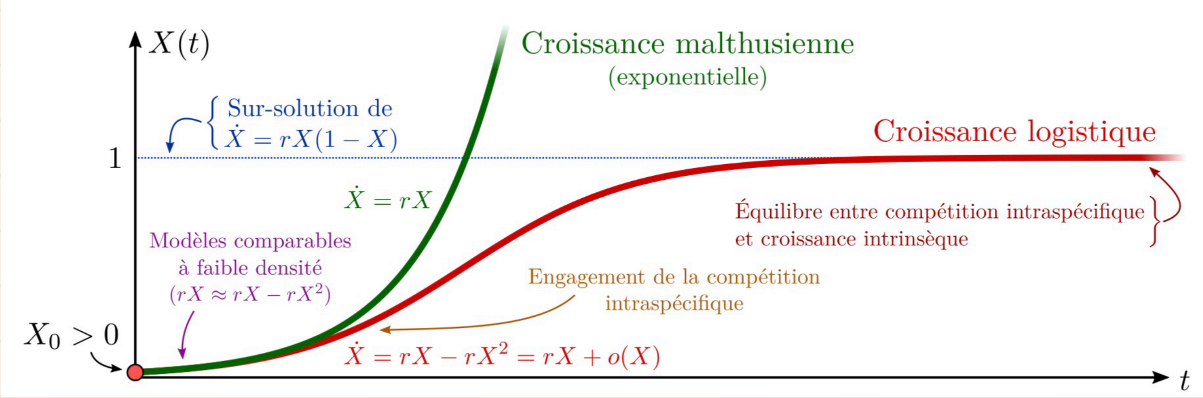
voir aussi $\dot{X} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right)$

↳ K : capacité d'accueil
capacité de charge
carrying capacity
(c'est la densité de saturation)
(K = 1 pour faire des maths)

Lignes de phase :



Trajectoires :



↳ **Résolution explicite par séparation des variables :**

$$\int_{s=0}^{t} \frac{\dot X}{X(1-X)}\, ds = t$$

On cherche une primitive de $X \mapsto \frac{1}{X(1-X)}$

↳ Décomposition en élts simples :

$$\frac{1}{X(1-X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{1-X} = \frac{a(1-X) + bX}{X(1-X)}$$

$$= \frac{1}{X(1-X)} \quad \text{si } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

↳ $\frac{d}{dX}\left(\log|X| - \log|1-X|\right) = \frac{1}{X(1-X)}$ ok

$$= \int_{s=0}^{t} \left(\log|X(s)| - \log|1-X(s)|\right)' ds = t$$

$$\log|X(t)| - \log|1-X(t)| = t + \log|X_0| - \log|1-X_0|$$

$$\log \left|\frac{X(t)}{1-X(t)}\right| = t + \log\left|\frac{X_0}{1-X_0}\right|$$

$$\frac{X(t)}{1-X(t)} = \left|\frac{X_0}{1-X_0}\right| e^t$$

$$X(t) = \left|\frac{X_0}{1-X_0}\right| e^t \left(1-X(t)\right)$$

$$\left(1+e^t\left|\frac{X_0}{1-X_0}\right|\right) X(t) = \left|\frac{X_0}{1-X_0}\right| e^t$$

$$X(t) = \frac{\left|\frac{X_0}{1-X_0}\right| e^t}{1+\left|\frac{X_0}{1-X_0}\right| e^t} = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} \xrightarrow{t\to\infty} 1.$$

ok...

↳ Modèles à Effet Allee (zoologiste américain) (1931)

↳ pénalisation de croissance à faible densité

↳ brassage génétique insuffisant ⇒ baisse fertilité

↳ difficulté à trouver un partenaire

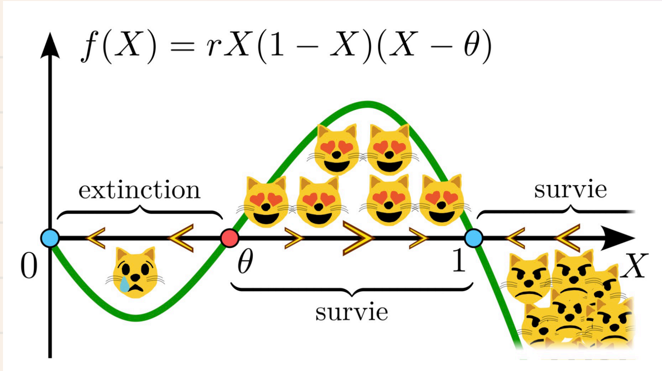
↳ Vulnérabilité des individus isolés face aux prédateurs

↳ Efficacité de la chasse en groupe ↘...

c) Le modèle bistable

$$\dot{X} = r X(1-X)(X-\theta) \longrightarrow 3 \text{ équilibres : } \begin{cases} 0 \ (\text{STABLE}) \\ 1 \ (\text{STABLE}) \\ \theta \ (\text{instable}) \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ Bi STABLE



$[0 \leq X_0 < \theta] \Rightarrow [X(t) \searrow 0]$

$[\theta < X_0] \Rightarrow [X(t) \to 1]$

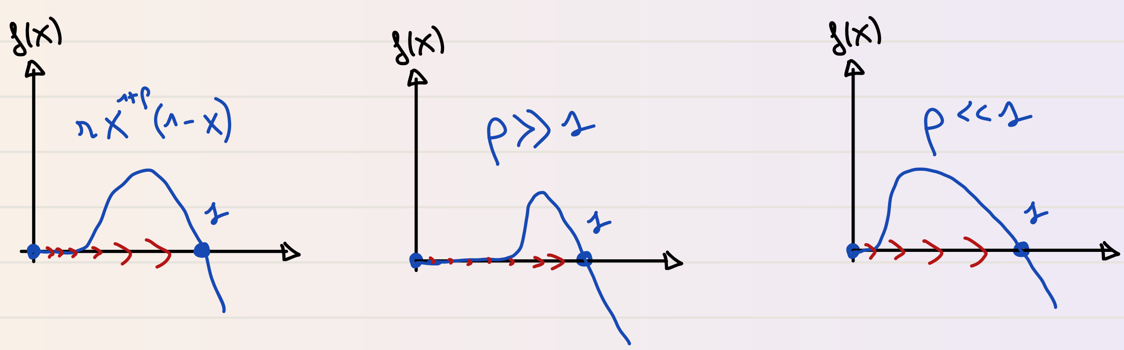
↳ Effet Allee fort (TRÈS MÉCHANT) : on meurt d'isolement

d) Le modèle monostable dégénéré

↳ Effet Allee faible (MOINS MÉCHANT) : on croît moins fort quand on est isolé...

$$\dot{X} = r X^{1+p}(1-X)$$

↳ 2 équilibres : 1 : STABLE
0 : INSTABLE (mais pas linéairement !)
↳ on dit que l'équilibre est dégénéré



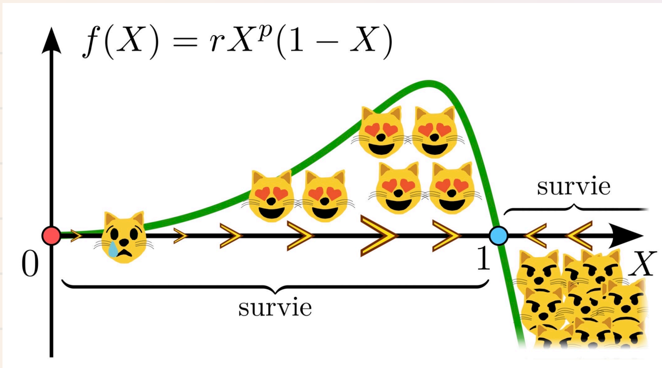
↳ $[p=0] \Rightarrow [f(X) = rX(1-X)$ (logistique)$]$

↳ p : intensité de l'effet Allee

↳ Quoi qu'il arrive, on a toujours invasion : $[X_0 > 0] \Rightarrow [X(t) \xrightarrow{t\to\infty} 1]$

(même si ça peut prendre bcp de temps...)

↳ Note pour plus tard : pour $u_t = \Delta u + u^{1+p}(1-u)$ l'invasion n'est plus systématique si p est grand contrairement à l'EDO... (le Laplacien "stabilise" l'eq triviale...)



4) OUTILS D'ANALYSE EN DIMENSION $N>1$

↳ En dimension supérieure $(N>1)$, l'EDO scalaire $\dot{X} = aX$ devient

(6) $\dot{X} = AX$ avec A une matrice carrée.

eg $\left[\dot{X} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} X\right] \Leftrightarrow \left[X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases}\dot{x} = x+2y\\ \dot{y} = y\end{cases}\right]$

↳ Lorsque $X \in \mathbb{R}^1$, $\dot{X} = aX \Rightarrow X(t) = X_0 e^{at} = e^{at} X_0$

↳ Cela se généralise en dimension $N>1$: $\left[\dot{X} = AX\right] \Rightarrow \left[X(t) = e^{tA} X_0\right]$

où e^{tA} est l'exponentielle matricielle de tA : $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$

et possède quelques propriétés sympathiques, notamment

$$\left[A = P\underbrace{J}_{P}P^{-1}\right] \Rightarrow \left[e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}\right]$$

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de Jordan...

↳ Aussi $e^{t\,\mathrm{diag}(\lambda_i)} = \mathrm{diag}\left(e^{t\lambda_i}\right)$

Donc $X(t) = Pe^{tJ}P^{-1}X_0$ et, quitte à changer de base, il suffit de comprendre e^{tJ} où J est une matrice de Jordan* (c'est relativement tractable mais hors cadre ici...)

*essentiellement issue d'un processus de diagonalisation...

↳ CE QU'IL FAUT RETENIR :

- Ce sont les valeurs propres de A qui dictent la stabilité au voisinage de 0.

↳ La géométrie plus complexe induite par $N>1$ fait émerger un grand nombre de comportements différents par rapport à la dimension 1 !

Juste en passant de $N=1$ à $N=2$:....

Théorème 2.10 (Jordan)

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice de passage $P \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ telle que la matrice triangulaire définie par blocs

$$T = \operatorname{diag}(D_1, \cdots, D_L, J_1, \cdots, J_K)$$

est semblable à A par le changement de base P, ie. $T = PAP^{-1}$, où

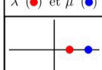
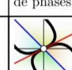
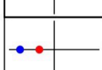
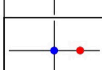
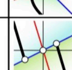
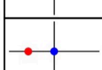
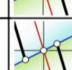
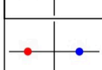
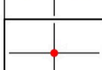
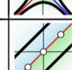
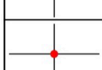
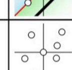
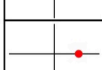
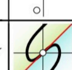
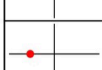
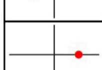
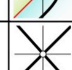
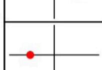
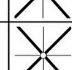
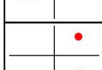
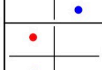
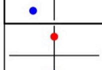
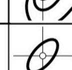
- $L, K \in \mathbb{N}$ ([a])
- pour tout $i \in [\![1; L]\!]$ il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ et $m_i \in [\![1; N]\!]$ tels que
$$D_i = \mu_i \cdot I_{m_i} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$$
- pour tout $j \in [\![1; K]\!]$ il existe $\lambda_j \in \mathbb{C}$ et $n_j \in [\![1; N]\!]$ tels que
$$J_j = J_{n_j}(\lambda_j) \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_1 \end{pmatrix} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \mu_L & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_L \end{pmatrix} & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{pmatrix} \lambda_K & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_K \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

FIGURE I : REPRÉSENTATION DE LA MATRICE T.

a. $L = 0$ signifie qu'il n'y a pas de bloc D_i ; de même, $K = 0$ signifie qu'il n'y a pas de bloc J_i.

Annexe 1 : portraits de phases de $\dot{x} = Ax$ dans $\mathbb{R}^2$

Affixes des valeurs propres λ (●) et μ (●)	Dim. des sep.	Expression des solutions $x(t)$	Allure du portait de phases	Sens de parcours des solutions	Signe de $\det(A)$	Signe de $\mathrm{Tr}(A)$
	$(1,1)$	$Be^{t\lambda}V_\lambda + Ce^{t\mu}V_\mu$		Origine : nœud répulsif En $-\infty$, $x(t)=0$; tangente : D_λ En $+\infty$, asymptote : V_μ	+	+
	$(1,1)$	$Be^{t\lambda}V_\lambda + Ce^{t\mu}V_\mu$		Origine : nœud attractif En $-\infty$, asymptote : V_μ En $+\infty$, $x(t)=0$; tangente : D_λ	+	−
	$(1,1)$	$Be^{t\lambda}V_\lambda + CV_\mu$		D_μ : nœuds répulsifs En $-\infty$, $x(t)=0$	0	+
	$(1,1)$	$Be^{t\lambda}V_\lambda + CV_\mu$		D_μ : nœuds attractifs En $+\infty$, $x(t)=0$	0	−
	$(1,1)$	$Be^{t\lambda}V_\lambda + Ce^{t\mu}V_\mu$		En $-\infty$, asymptote : D_λ En $+\infty$, asymptote : D_μ	−	?
	(1)	$(B+tC)V_\lambda + C\cdot V$		Sens de V_λ dans le demi-plan de V Sens de $-V_\lambda$ dans le demi-plan de $-V$	0	0
	(2)	$B\cdot c_1 + C\cdot c_2$ solution constante car $A=0$		RAS.	0	0
	(1)	$(B+tC)e^{t\lambda}V_\lambda + Ce^{t\lambda}V$		Origine : nœud répulsif En $-\infty$, $x(t)=0$; tangente : D_λ En $+\infty$, asymptote : V_λ	+	+
	(1)	$(B+tC)e^{t\lambda}V_\lambda + Ce^{t\lambda}V$		Origine : nœud attractif En $-\infty$, asymptote : V_λ En $+\infty$, $x(t)=0$; tangente : D_λ	+	−
	(2)	$e^{t\lambda}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$		Origine : nœud répulsif En $-\infty$, $x(t)=0$	+	+
	(2)	$e^{t\lambda}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$		Origine : nœud attractif En $+\infty$, $x(t)=0$	+	−
	$(1,1)$	$e^{t\alpha}\cdot\mathcal{R}_{t\beta}\cdot x_0$ dans la base (U_λ, W_λ)		Origine : nœud répulsif	+	+
	$(1,1)$	$e^{t\alpha}\cdot\mathcal{R}_{t\beta}\cdot x_0$ dans la base (U_λ, W_λ)		Origine : nœud attractif	+	−
	$(1,1)$	$\mathcal{R}_{t\beta}\cdot x_0$ dans la base (U_λ, W_λ)		Le sens de rotation dépend de la base (U_λ, W_λ)	+	0

<u>TH</u> (de linéarisation d'Hartman-Grobman) : Supposons $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$, X_E un équilibre de l'EDO $\dot{X} = f(X)$, en notant $J := \nabla f(X_E) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ (la matrice jacobienne de f évaluée au point X_E), alors, si $\underbrace{\mathrm{Spec}(J) \cap i\mathbb{R} = \phi}_{\text{ssi } X_E \text{ est hyperbolique}}$,

$$\left[\max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(J)} \{\Re(\lambda)\} < 0\right] \Rightarrow \left[X_E \text{ asymptotiquement stable}\right]$$

↳ i.e. <u>toutes</u> les vp sont $\Re < 0$

$$\left[\min_{\lambda \in \mathrm{Spec}(J)} \{\Re(\lambda)\} > 0\right] \Rightarrow \left[X_E \text{ INSTABLE}\right]$$

↳ i.e. $\exists$ au moins une vp $\Re > 0$

↳ Un autre outil (TRÈS PUISSANT) les <u>intégrales premières</u>

<u>DÉF</u> (Intégrale première) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une intégrale première pour l'EDO $\dot{X} = f(X)$ est une fonction $I : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que I reste constante le long des trajectoires du système, c'est-à-dire que pour tout solution $X = X(t)$ de l'EDO, on a

$$\frac{d(I \circ X)}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T) \quad (6)$$

↳ <u>Remarques</u> :

- La connaissance d'une intégrale première est une information TRÈS précieuse puisque les trajectoires du système sont ses lignes de niveaux, ie les ensembles de la forme $\mathcal{L}_c := \{X \in \mathbb{R}^N \text{ tq } I(X) = c\}$, où $c \in \mathbb{R}$ est une cste.

↳ <u>Un exemple facile</u> : $\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice de} \\ \text{rotation d'angle } \frac{\pi}{2} \dots}} X$

↳ linéaire

↳ Équilibre : 0 $\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\right)$

Posons $I(X) = I(x,y) = x^2+y^2$

Alors $(I\circ X)(t) = x^2(t)+y^2(t)$

$$\frac{d}{dt}(I\circ X)(t) = 2\dot{x}(t)\,x(t) + 2\dot{y}(t)\,y(t)$$

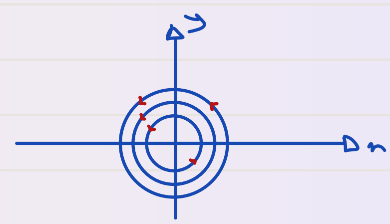
or $\dot{x} = -y$ et $\dot{y} = x$ donc

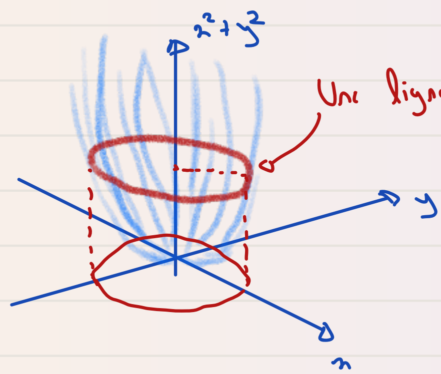
$$\frac{d}{dt}(I\circ X)(t) = -2y(t)\,x(t) + 2x(t)\,y(t) = 0$$

Donc I est une intégrale première de l'EDO : les traj. sont données par

$$x^2(t)+y^2(t) = c \quad \text{avec } c\in\mathbb{R}$$

↳ Conclusion : Les trajectoires sont des cercles !





Une ligne de niveau et sa projection sur le plan $z=0$...

- Les intégrales premières ne sont réellement utiles qu'en dimension $N>1$...
- Les fonctions constantes sont des intégrales premières triviales.
- En dimension $N=2$, (6) se dérive en utilisant la règle de la chaîne :

$$\forall t\in(0,T),\quad \partial_x I(x(t),y(t))\times\dot{x}(t) + \partial_y I(x(t),y(t))\times\dot{y}(t) = 0$$

- En général, trouver une intégrale première est non trivial et relève plus de l'astuce que de la simple routine (intuition physique, énergie conservée, etc...)

4) EXEMPLES D'EDO VECTORIELLES (à plusieurs popula°)

↳ Dans cette section, on prend $N=2$ (2 populations qui interagissent)

a) Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra (1925-1926)

↳ Notons à l'instant $t>0$:

- $x(t)$ la taille d'une population de proies ;
- $y(t)$ la taille d'une population de prédateurs.

↳ $r_1 > 0$: Taux de croissance des proies

$r_2 > 0$: Taux de décroissance des prédateurs

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1 x & t>0 \\ \dot{y} = -r_2 y & t>0. \end{cases}$$

↳ Pour le moment, ce sont 2 EDO découplées (pas d'interactions)

↳ $x(t) = x_0 e^{r_1 t} \longrightarrow +\infty$ (explosion des proies)

$y(t) = y_0 e^{-r_2 t} \longrightarrow 0$ (disparition des prédateurs)

↳ Ajout d'un terme de prédation de y sur x :

↳ Pour la logistique ($\dot{x} = rx(1-x)$), on avait le terme de compétition

$-rx^2 = -\underbrace{rx}\, x\, x$

↳ Le taux de décroissance était négativement proportionnel à la taille de la population (+ de pop ⇒ + de mort)

↳ ici on fait pareil dans l'eq des proies :

$$\dot{x} = r_1 x - \underbrace{\alpha y x}$$

$\alpha > 0$: le coef de prédation de y s/ x

↳ La biomasse retirée de x est alors réinjectée dans l'eq des x (avec un coefficient $\beta > 0$ de capacité des prédateurs à convertir les proies en descendance...) :

$$\dot{y} = -r_2 y + \beta y x$$

↳ Au final, on obtient le système proie prédateur suivant :

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x} = r_1 x - \alpha x y = x(r_1 - \alpha y) & t > 0 \\ \dot{y} = -r_2 y + \beta x y = y(\beta x - r_2) & t > 0 \end{cases}$$

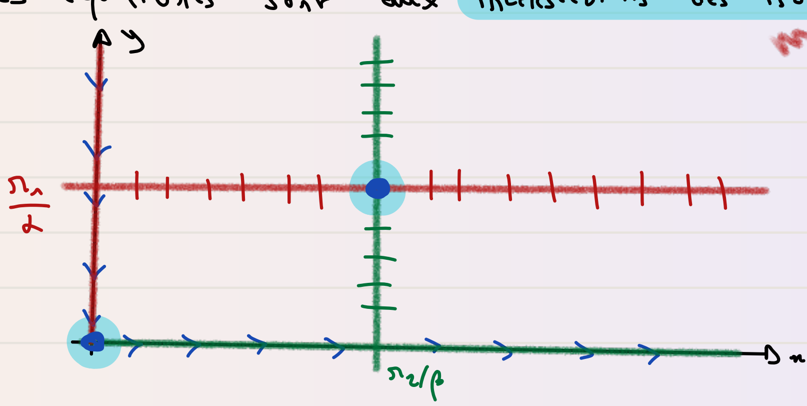
↳ Noter que $(x_0 e^{r_1 t}, 0)$ et $(0, y_0 e^{-r_2 t})$ sont deux solutions barrières donc les traj initiées dans le cadran Nord-Est le restent forever...

- Construction du plan de phases

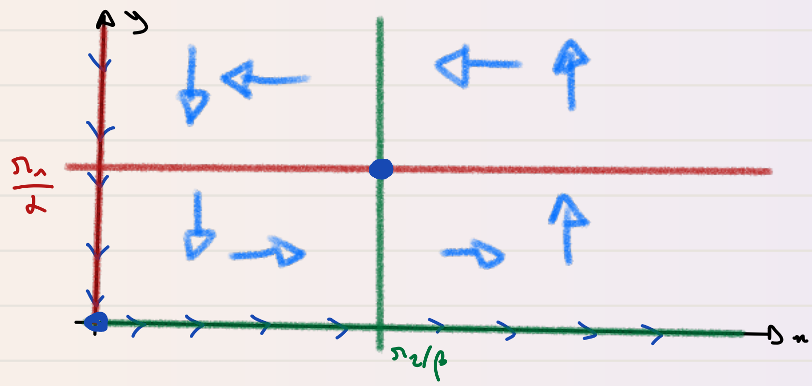
↳ Les équilibres : $\dot{x} = 0 \iff x = 0$ ou $y = \frac{r_1}{\alpha}$

$$\underbrace{\dot{y} = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = \frac{r_2}{\beta}}_{\text{équation des isoclines}}$$

↳ Les équilibres sont aux intersections des isoclines



↳ Dans chaque secteur défini par les isoclines, x et y sont monotones :



↳ On a compris que ça tourne...

$[x \gg 1] \Rightarrow [y \nearrow] \Rightarrow [y \gg 1] \Rightarrow [x \searrow] \Rightarrow [x \ll 1]$

$\Downarrow$

$[x \nearrow] \Leftarrow [y \ll 1] \Leftarrow [y \searrow]$

$[x \nearrow] \Rightarrow [x \gg 1]$

↳ STABILITÉ DES ÉQUILIBRES ?

$$\underbrace{\nabla f(x,y)}_{\text{Matrice Jacobienne}} = \begin{pmatrix} r_1 - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -r_2 + \beta x \end{pmatrix}$$

$$A = \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix}$$

→ VALEURS PROPRES ((0,0) est instable)

$$B = \nabla f\left(\frac{r_2}{\beta} ; \frac{r_1}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r_2 \alpha}{\beta} \\ \frac{r_1 \beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

(type matrice rotation...)

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + r_1 r_2 \qquad \mathrm{Spec}(B) = \{\pm i\sqrt{r_1 r_2}\}$$

↳ $\left(\frac{r_2}{\beta} ; \frac{r_1}{\alpha}\right)$: non hyperbolique : pas de conclusion possible...

↳ On s'en sort avec une intégrale première :

↳ Idée : Regarder le ratio de variation

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y(-r_2 + \beta x)}{x(r_1 - \alpha y)}$$

Séparer les variables

$$\dot{y}\,x\,(r_1 - \alpha y) = \dot{x}\,y\,(-r_2 + \beta x)$$

$$\frac{\dot{y}(r_1 - \alpha y)}{y} = \frac{\dot{x}(-r_2 + \beta x)}{x}$$

$$r_1 \frac{\dot{y}}{y} - \alpha \dot{y} = -r_2 \frac{\dot{x}}{x} + \beta \dot{x}$$

$\int_{s=0}^{t}$

$$r_1\left(\log(y(t)) - \log(y_0)\right) - \alpha\left(y(t) - y_0\right) = -r_2\left(\log(x(t)) - \log(x_0)\right) + \beta\left(x(t) - x_0\right)$$

Mettre tout ce qui dépend de t dans le LHS...

$$\underbrace{r_2 \log(x(t)) - \beta x(t) + r_1 \ln(y(t)) - \alpha y(t)}_{=: I(x(t), y(t))} = \underbrace{r_2 \ln(x_0) - \beta x_0 + r_1 \ln(y_0) - \alpha y_0}_{\text{(alors)} = I(x_0, y_0)}$$

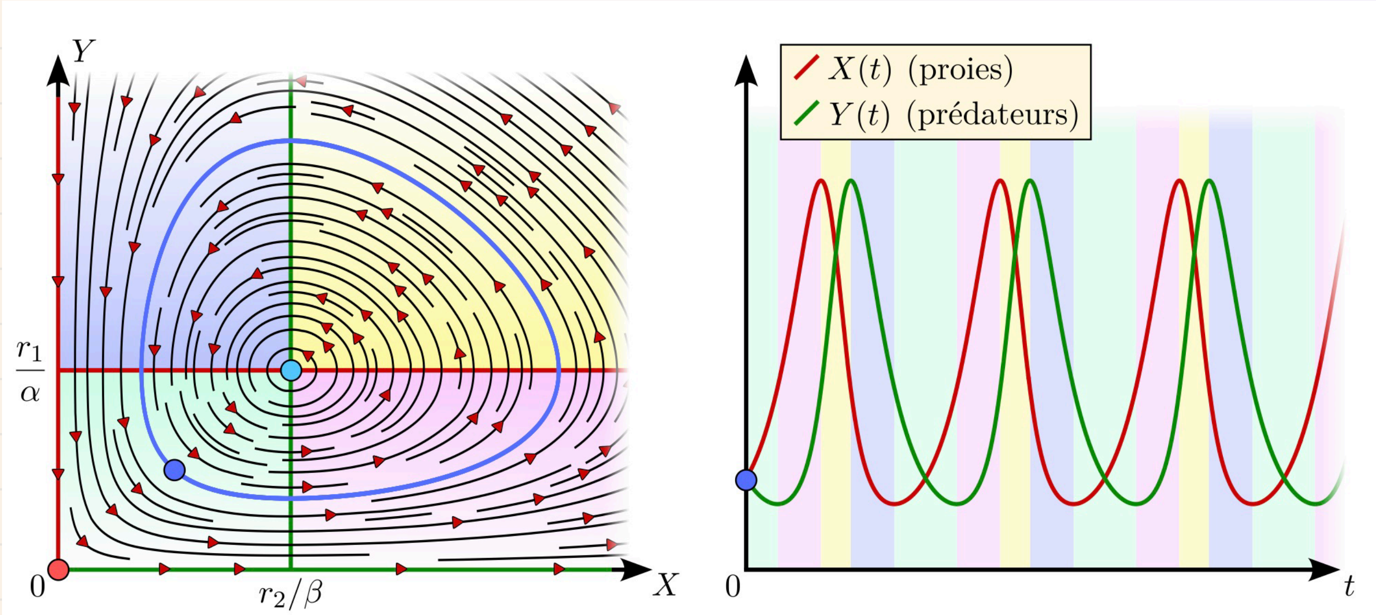
(Vrai $\forall t \in (0, T)$...)

↳ Ce qui signifie de I est constante le long des traj, donc

$$I : (x, y) \mapsto r_2 \log(x) - \beta x + r_1 \log(y) - \alpha y$$

est une intégrale première.

↳ De cette information on peut ensuite déduire que les traj sont en fait périodiques...



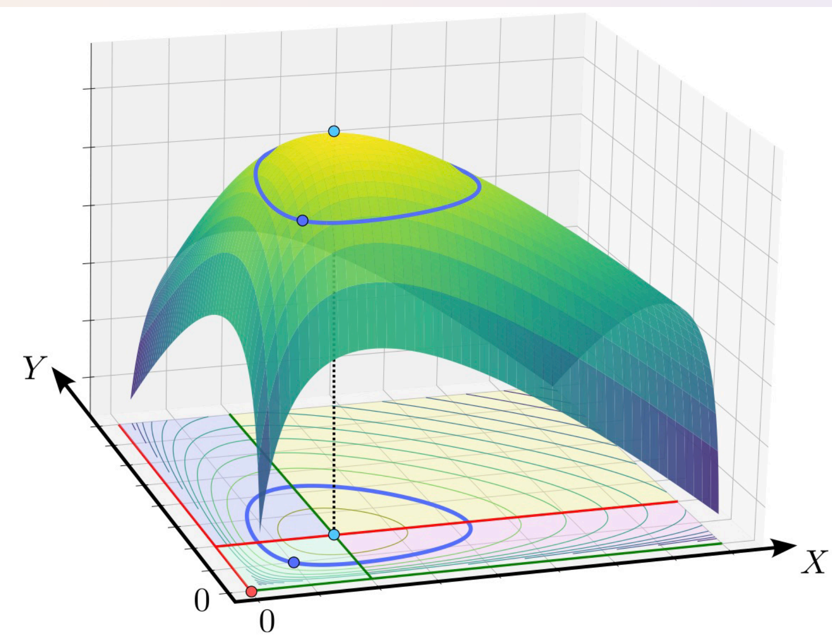


***Figure XIV — Représentation 3D de l'intégrale première** $I(X, Y)$ **du système proie-prédateur** (1.20).* *La surface représente la fonction* $I(X, Y) = r_2 \ln(X) - \beta X + r_1 \ln(Y) - \alpha Y$ (1.25)*, et les courbes projetées sur le plan* (X, Y) *sont ses lignes de niveau, qui correspondent aux trajectoires du système dans le plan de phase. On visualise ainsi que chaque solution du système évolue sur une courbe de niveau constante de* I*, illustrant la conservation de cette quantité le long des trajectoires.*

b) Un modèle d'arbres et de graines (2ème moitié du XXe siècle, origines pas claires...)

$$\begin{cases} u : \text{arbres} \\ w : \text{graines} \end{cases}$$

les graines donnent des arbres (β : taux "d'éclosion des graines")

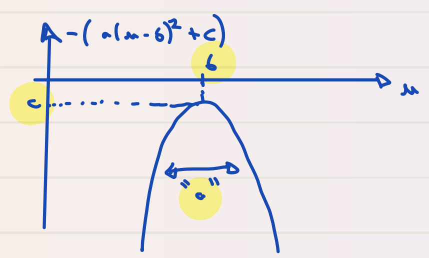
$$\begin{cases} \dot{u} = \beta w - q(u) \\ \dot{w} = -\beta w + \alpha u \end{cases}$$

← mortalité des arbres

les arbres produisent des graines

les graines qui éclosent sont retirées de w

ici $q(u) = u\underbrace{\left(a(u-b)^2 + c\right)}_{\text{à lire comme le taux de décroissance :}}$



Effet Allee
↳ Arbres isolés moins protégés...

Compétition
↳ Espace dispo notamment

↳ c : taux de mortalité de base

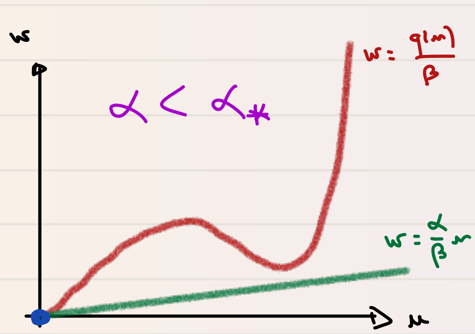
↳ b : taille de population optimale pour minimiser la décroissance

↳ a : sensibilité aux variations de tailles...

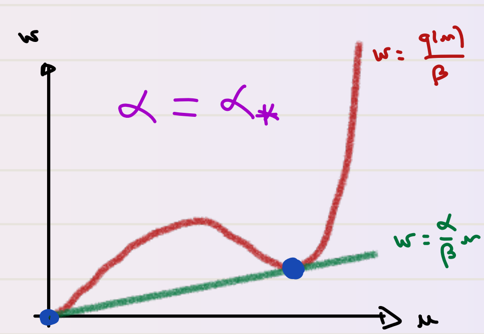
↳ <u>Équilibres</u> : $\dot{w} = 0 \iff w = \frac{\alpha}{\beta}u$

$\dot{u} = 0 \iff w = \frac{q(u)}{\beta}$

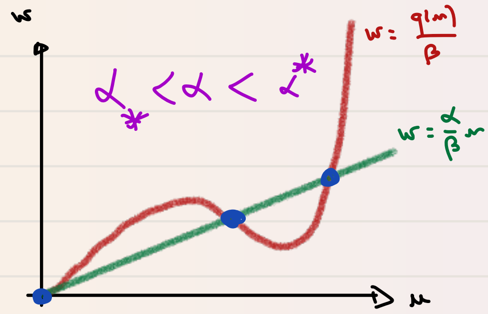
Alors, en fonction du paramètre α :



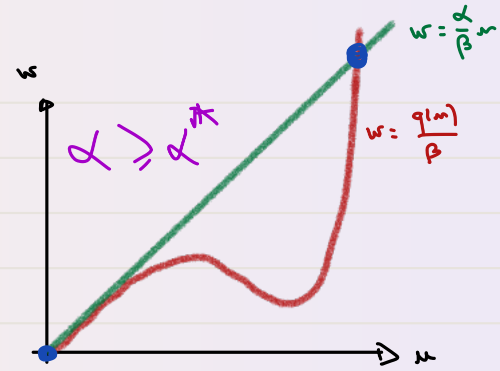
1 eq



2 eq



3 eq



2 eq

↳ On peut regarder s'il existe des bifurcations (ie des changements de stabilité des équilibres en bougeant le paramètre α...)

↳ Question typique : que se passe-t-il si un eq stable et un eq instable fusionnent ?

↳ Plan de phase dans le cas à 3 équilibres ($\alpha_* < \alpha < \alpha^*$)