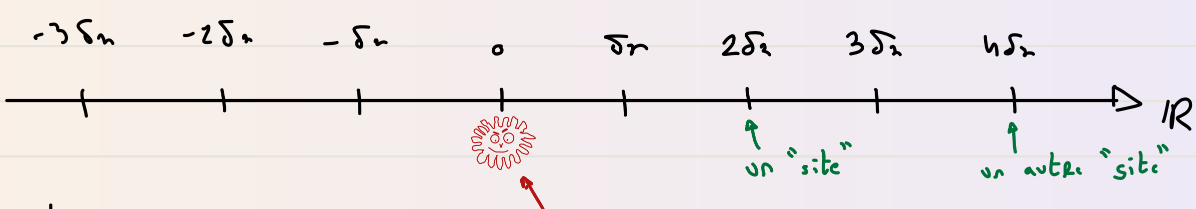
Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

Chapitre 2 : Chaleur

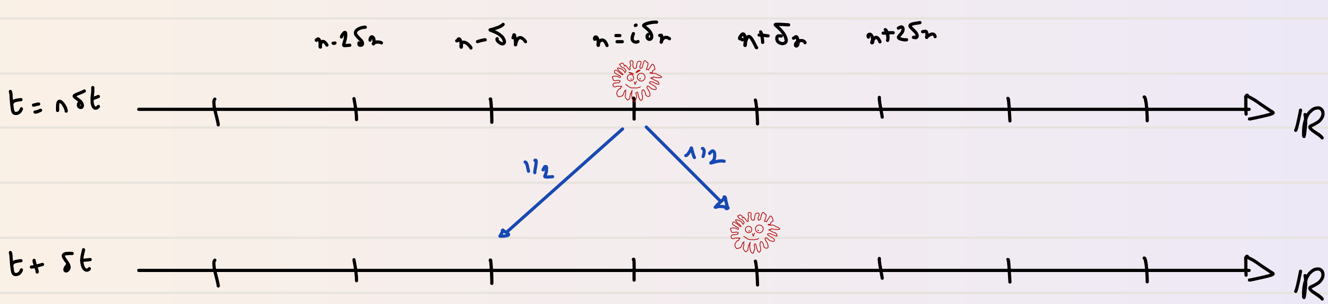
↳ L'objectif de ce chapitre est d'introduire l'éq. de la chaleur $u_t = \Delta u$ en domaines bornés et non-borné et de développer une intuition quant au comportement de ses solutions.

1) Émergence de la Chaleur à partir de marches aléatoires



↳ On considère un individu qui vit sur le réseau spatial discret $\delta x \mathbb{Z}$. ($\delta x > 0$ est le pas spatial)

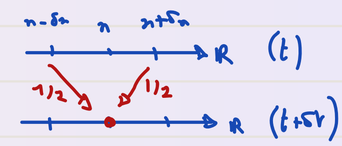
↳ On impose une dynamique temporelle discrète : à chaque pas de temps $\delta t > 0$, l'individu choisit l'un de ses deux sites adjacents avec probabilité $1/2$:



↳ Une trajectoire possible :

↳ Loi des proba totales : On note $u(t,x) := \mathbb{P}($ en x au temps $t)$

$$u(t+\delta t, x) = \frac{1}{2} u(t, x-\delta x) + \frac{1}{2} u(t, x+\delta x)$$



On veut faire apparaître un accroissement en temps... du genre $\frac{u(t+\delta t,x)-u(t,x)}{\delta t} \approx \partial_t u(t,x)$...

$$u(t+\delta t, x) - u(t,x) = \frac{1}{2}\Big[u(t, x-\delta x) - 2u(t,x) + u(t, x+\delta x)\Big]$$

$$\frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t} = \frac{1}{2\delta t}\Big[u(t, x-\delta x) - 2u(t,x) + u(t, x+\delta x)\Big]$$

On multiplie et divise par δx^2 dans le membre de droite pour obtenir un Laplacien discret $\left(\frac{u(t,x+\delta x)-2u(t,x)+u(t,x-\delta x)}{\delta x^2} \approx \partial_{xx} u(t,x) ...\right)$ (cf. le Taylor plus bas...)

$$\frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t} = \frac{\delta x^2}{2\delta t}\left[\frac{u(t, x-\delta x) - 2u(t,x) + u(t, x+\delta x)}{\delta x^2}\right]$$

↳ Formellement, si u est régulière :

$u(t+\delta t, x) = u(t,x) + \delta t . u_t(t,x) + o(\delta t)$ donc $\frac{u(t+\delta t,x) - u(t,x)}{\delta t} = u_t(t,x) + o(1)$

$u(t, x\pm\delta x) = u(t,x) \pm \delta x\, u_x(t,x) + \frac{\delta x^2}{2} u_{xx}(t,x) + o(\delta x^2)$

↳ $u(t, x+\delta x) + u(t, x-\delta x) = 2u(t,x) + \delta x^2 u_{xx}(t,x) + o(\delta x^2)$ donc $\frac{u(t,x-\delta x) - 2u(t,x) + u(t,x+\delta x)}{\delta x^2} = u_{xx}(t,x) + o(1)$

↳ Ainsi,

$$u_t(t,x) + o_t(\tau) = \frac{\delta x^2}{2\delta\tau}\left(u_{xx}(t,x) + o_x(\tau)\right)$$

↳ Il ne "reste" plus qu'à passer à la limite $\delta x, \delta\tau \to 0$, mais ⚠ à $\frac{\delta x^2}{2\delta\tau}$: si on envoie δx et $\delta\tau$ vers 0 n'importe comment, $\frac{\delta x^2}{2\delta\tau}$ peut faire n'importe quoi :

↳ Si $\delta x^2 \to 0$ bcp plus vite que $\delta\tau \to 0$, alors $\frac{\delta x^2}{\delta\tau} \xrightarrow{\delta x, \delta\tau \to 0} 0$ et on paralise la dynamique : la particule ne saute pas assez vite pour "s'extraire" de l'origine alors que le réseau se "concentre sur 0". Résultat :

$\partial_t u = 0$: ça n'évolue pas $\left(u(t,x) \equiv u_0(x) \text{ Forever...}\right)$

↳ À l'inverse, si $\delta x^2 \to 0$ trop lentement par rapport à $\delta\tau$, alors les "longs sauts" sont TRÈS fréquents. Résultat : la particule s'échappe à l'infini : "$\partial_t u = +\infty$"....

↳ Le bon cadre : il faut que δx et $\delta\tau$ tendent vers 0 en harmonie !

Pour faire simple : fixons $\frac{\delta x^2}{2\delta\tau} = d$ $\left(\Leftrightarrow \delta x = \sqrt{2d\tau}\right.$, l'un est fixé par rapport à l'autre$\left.\right)$, (dans la suite $d = 1$) (d homogène à L^2T^{-1})

Alors $u_t = d\, u_{xx}$ $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, l'équation de la chaleur.

↳ <u>Une première remarque :</u>

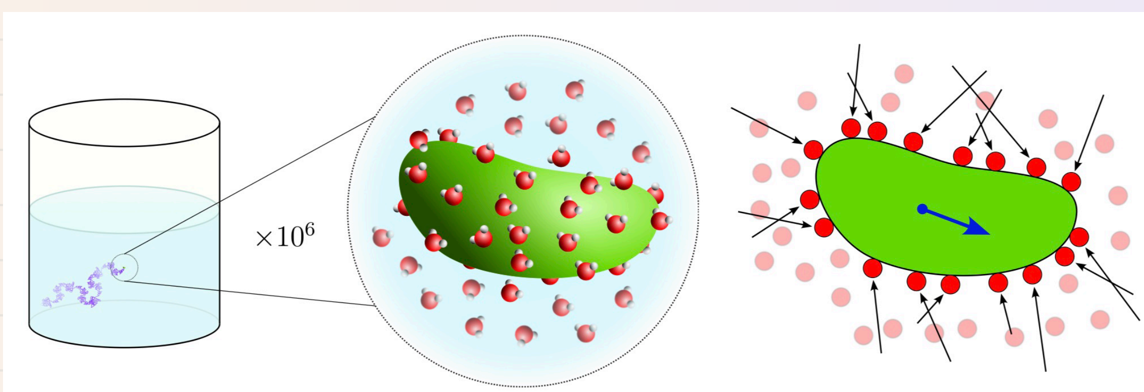
Si $u_t = \delta u_{xx}$, on pose $v(t,x) := u\left(\frac{t}{\delta}, x\right)$, alors

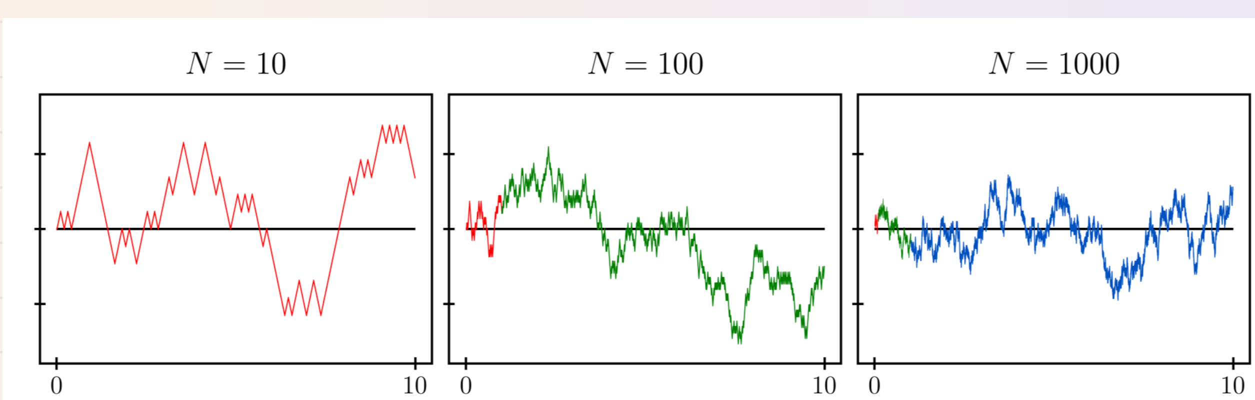
$$v_t(t,x) = \frac{1}{\delta} u_t\left(\frac{t}{\delta}, x\right) = \frac{1}{\delta}\, \delta\, u_{xx}\left(\frac{t}{\delta}, x\right) = u_{xx}\left(\frac{t}{\delta}, x\right) = v_{xx}(t,x).$$

Donc on peut éliminer δ en accélérant ou ralentissant la vidéo... ($\Rightarrow \delta = 1$ partout ensuite)

↳ La dérivation précédente n'est que formelle : il faut justifier qu'il existe bien un processus limite u et qu'il possède la régularité suffisante pour faire Taylor.

↳ <u>Note</u> : C'est la méthode de <u>Donsker pour construire le mouvement Brownien</u> (1951)



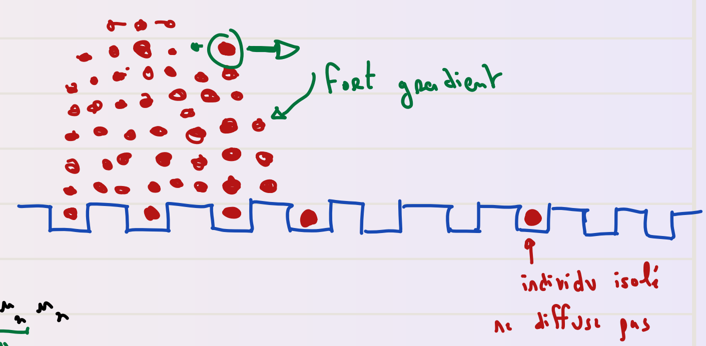


↳ Note : On peut biaiser la marche (sauter à gauche avec α et à droite avec $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$...)

↳ Il faut prendre quelques précautions en plus mais il est possible d'obtenir une équation de transport-diffusion : $u_t = d u_{xx} - v u_x$

↳ On peut aussi dériver de la diffusion poreuse (non-linéaire) :

$$u_t = (u^2)_{xx} \qquad t>0,\ x \in \mathbb{R}$$



$$= ((u^2)_x)_x$$

$$= (2u\, u_x)_x = \underbrace{2u}_{\text{"}d\text{"}}\, u_{xx} + \underbrace{2u_x}_{\text{"}v\text{"}}\, u_x$$

Besoin des autres pour diffuser (individus isolés ne diffusent pas...)

Advection + forte si fort gradient : on "glisse sur les autres"

↳ Propriétés de la marche préservée à la limite :

↳ SYMÉTRIE : Si $u_0 = u|_{t=0}$ (densité initiale sur $\mathbb{R}$) est symétrique (i.e. paire), alors $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ reste symétrique (paire)

(On dit que le mouvement est anisotrope : il ne dépend pas de la direction qu'il prend)

PREUVE : Supposons u_0 paire (i.e. $u_0(-x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

On note u la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

↳ On pose $v(t,x) = u(t,-x)$, alors $\left| \begin{array}{l} v_t(t,x) = u_t(t,-x) \\ v_x(t,x) = -u_x(t,-x) \\ v_{xx}(t,x) = +u_{xx}(t,-x) \end{array} \right.$

Donc
$$\begin{aligned} v_t(t,x) - v_{xx}(t,x) &= u_t(t,-x) - u_{xx}(t,-x) \\ &= u_{xx}(t,-x) - u_{xx}(t,-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi
$$\begin{cases} v_t = v_{xx} & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ v|_{t=0}(x) = u_0(-x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

↳ Donc u et v sont solutions du même pb.

↳ Donc (sous garantie d'unicité de la solution : $u(t,x) = v(t,x) = u(t,-x)$ $\forall t>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc u reste symétrique si u_0 l'est. □

↳ Pour la suite

PREUVE DE L'UNICITÉ : Le problème $u_t = u_{xx}$ est linéaire donc si v et w sont 2 solutions du pb de Cauchy $\left| \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & t>0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{array} \right.$ alors $\delta = v - w$ est encore solution de la Chaleur, partant de $\delta|_{t=0} = 0$:
$$\begin{cases} \delta_t = \delta_{xx} & t>0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \delta|_{t=0} = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

↳ Donc montrer l'unicité des solutions revient à montrer l'unicité de la solution triviale (c'est toujours le cas pour les pb de Cauchy linéaires)

↳ On prend donc $u_0 \equiv 0$, on veut $u(t,x) = 0 \quad \forall t, \forall x$.

↳ Méthode d'énergie : $E(t) := \int_{x \in \mathbb{R}} u^2(t,x)\, dx$

$$E'(t) \overset{\text{formellement}}{=} \int_{x \in \mathbb{R}} 2\, u_t(t,x)\, u(t,x)\, dx = 2 \int_{x \in \mathbb{R}} u_{xx}(t,x)\, u(t,x)\, dx$$

$$= 2 \left(\underbrace{\Big[u_x(t,x)\, u(t,x) \Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{\substack{=0 \\ \text{(densité nulle à l'infini)}}} - \int_{x \in \mathbb{R}} (u_x(t,x))^2\, dx \right)$$

$$= -2 \int_{x \in \mathbb{R}} (u_x)^2\, dx \leqslant 0$$

↳ Donc $\underbrace{E \searrow \text{ et } E \geqslant 0 \text{ et } E(t=0) = \int_{\mathbb{R}} u_0^2 = \int 0^2 = 0}$

$$\Rightarrow E(t) = 0 \quad \forall t \geqslant 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\, dx}$$

↳ Donc $u = 0$ dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

↳ D'où l'unicité. □

↳ Suite des propriétés préservées :

↳ PRÉSERVATION DE LA MASSE (ie $\|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}$)

Dans la preuve de l'unicité, on a vu que la chaleur dissipe la norme L^2 : $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = E(t)^{1/2} \searrow$

↳ Notons $m(t) := \int_{x\in\mathbb{R}} u(t,x)\,dx$ (qui est la norme $L^1(\mathbb{R})$ de $u(t,\cdot)$ si $u \geq 0 \ldots$) ce qui est naturel pour une densité et automatique dès que $u_0 \geq 0$)

Formellement

$$\text{Alors } m'(t) \stackrel{\text{Formellement}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} u_t(t,x)\,dx = \int_{x\in\mathbb{R}} u_{xx}(t,x)\,dx = \Big[u_x(t,x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Donc $m(t) \equiv \text{constante} = m(t=0)$

↳ DISSIPATION :

Bien que u ne soit pas nécessairement une densité de proba ($\int_{x\in\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = 1$), on peut l'imaginer en tant que telle (sinon, on peut toujours poser $\tilde{u}(t,x) = \frac{u(t,x)}{\int u_0} \ldots$)

↳ Si u_0 est symétrique (paire), alors on sait que u va rester paire, si bien que la position moyenne d'un individu sera toujours nulle :

$$\mathbb{E}(\underbrace{X(t)}_{\text{position d'un individu}}) = \int_{x\in\mathbb{R}} x\,u(t,x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,u(t,x)\,dx + \int_0^{+\infty} x\,u(t,x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\infty} x\,u(t,-x)\,dx + \int_0^{+\infty} x\,u(t,x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\infty} x u(t,x)\,dx + \int_0^{+\infty} x\, u(t,x)\,dx$$

$$= 0$$

↳ <u>Regardons maintenant sa variance :</u> $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \underbrace{\mathbb{E}(X)^2}_{=0\ldots}$

$$v(t) := \mathrm{Var}(X(t)) = \int_{x\in\mathbb{R}} x^2 u(t,x)\,dx$$

$$v'(t) \overset{\text{formellement}}{=} \int_{x\in\mathbb{R}} x^2 u_t(t,x)\,dx$$

$$= \int_{x\in\mathbb{R}} x^2 u_{xx}(t,x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[x^2 u_x(t,x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ (admis pour l'instant...)}} - 2\int_{x\in\mathbb{R}} x\, u_x(t,x)\,dx$$

$$= \underbrace{-2\left[x u(t,x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ (admis pour l'instant...)}} + 2\underbrace{\int_{x\in\mathbb{R}} u(t,x)\,dx}_{=1 \text{ (densité de proba)}}$$

Donc $v'(t) = 2$ donc $v(t) = \mathrm{Var}(X(t)) = v_0 + 2t \sim 2t$

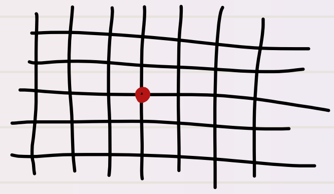
↳ Donc l'écart type se comporte comme $\sqrt{t}$ (on retrouve le ratio parabolique $\delta x^2 = 2\delta t$...)

↳ La population <u>s'étale</u>

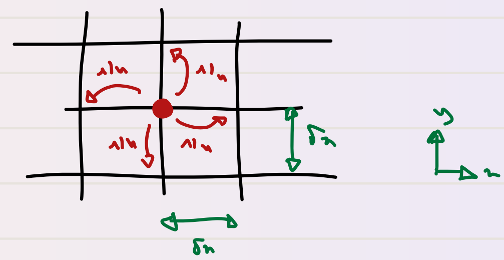
↳ Généralisation de la marche aléatoire en dimension supérieure

Passage de $N=1$ à $N=2$:

$\delta x\,\mathbb{Z}$ devient $\delta x\,\mathbb{Z}^2$ =



↳ La dynamique devient :



↳ Le schéma discret devient :

$$\underbrace{\frac{u(t+\delta t,x,y)-u(t,x,y)}{\delta t}}_{\simeq \partial_t u} = \frac{\delta x^2}{4\delta t}\left[\overbrace{\frac{u(t,x+\delta x,y)-2u(t,x,y)+u(t,x-\delta x,y)}{\delta x^2}}^{\simeq \partial_{xx} u} + \underbrace{\frac{u(t,x,y+\delta x)-2u(t,x,y)+u(t,x,y-\delta x)}{\delta x^2}}_{\simeq \partial_{yy} u}\right]$$

↳ L'opérateur Laplacien 1D ∂_{xx} devient le Laplacien 2D :

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

2) Résolution de la Chaleur sur $\mathbb{R}$ par Fourier

a) TOOLBOX : TRANSFORMÉE DE FOURIER

↳ Motivation : Si $f \in L^2(0,L)$, on définit ses coefficients de Fourier pour $k \in \mathbb{Z}$ par

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{L}\int_{x=0}^{L} f(x) e^{-\frac{2i\pi k x}{L}} dx,$$ et on peut alors reconstruire f à l'aide de ces coefficients :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{\frac{2i\pi k x}{L}}$$

$\left(e^{\frac{2i\pi k x}{L}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ base Hilbertienne de $L^2(0,L)$

et $\left(\hat{f}(k)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de la décomposition de f...

↳ Ici, f est peut être imaginée prolongée périodiquement (de période L), et si f est à valeurs réelles, on peut décomposer $e^{\frac{2i\pi k x}{L}}$ en des cos et des sin (arguments de symétrie/conjugaison) de fréquence $\frac{L}{k}$

(L : freq fonda
$\frac{L}{k}$: harmoniques
$k=0$ donne la valeur moyenne)

↳ Il faut voir $\hat{f}(k)$ comme l'amplitude du $k^{\text{ième}}$ mode

↳ DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER (DANS $\mathbb{R}^N$)

possible... ici $N=1$

On définit, comme sur le segment, pour $\xi \in \mathbb{R}$

(analogue de $k \in \mathbb{Z}$ vu précédemment
"ξ est une fréquence...")

$$\hat{f}(\xi) := \int_{x\in\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

↳ Cependant, il est a priori possible que $\hat{f}(\xi)$ explose si $f \in L^2(\mathbb{R})$ en général...

↳ Sur le segment Cauchy-Schwarz assure $\left|\hat{f}(k)\right| = \frac{1}{L}\left|\left(f(x); e^{-\frac{2ik\pi x}{L}}\right)_{L^2(0,L)}\right|$

$$\leq \|f\|_{L^2} \cdot \left\|e^{-\frac{2ik\pi x}{L}}\right\|_{L^2}$$

$$= \|f\|_{L^2}$$

Cependant $\forall L > 0$, $e^{-\frac{2ik\pi x}{L}} \notin L^2(\mathbb{R})$...

↳ La déf de $\hat{f}(\xi)$ fonctionne cependant dès que $f \in L^1(\mathbb{R})$

↳ Noter qu'on a des propriétés supplémentaires si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

↳ Notamment un théorème de Plancherel (= Parseval pour les séries de Fourier) : $\left[f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\right] \Rightarrow \left[\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\right]$

↳ Cela permet, par densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ de prolonger la TF dans $L^2(\mathbb{R})$...

↳ PREMIERS EXEMPLES

1) $f(x) = \frac{1}{2}\,\Pi_{(-1;1)}(x)$

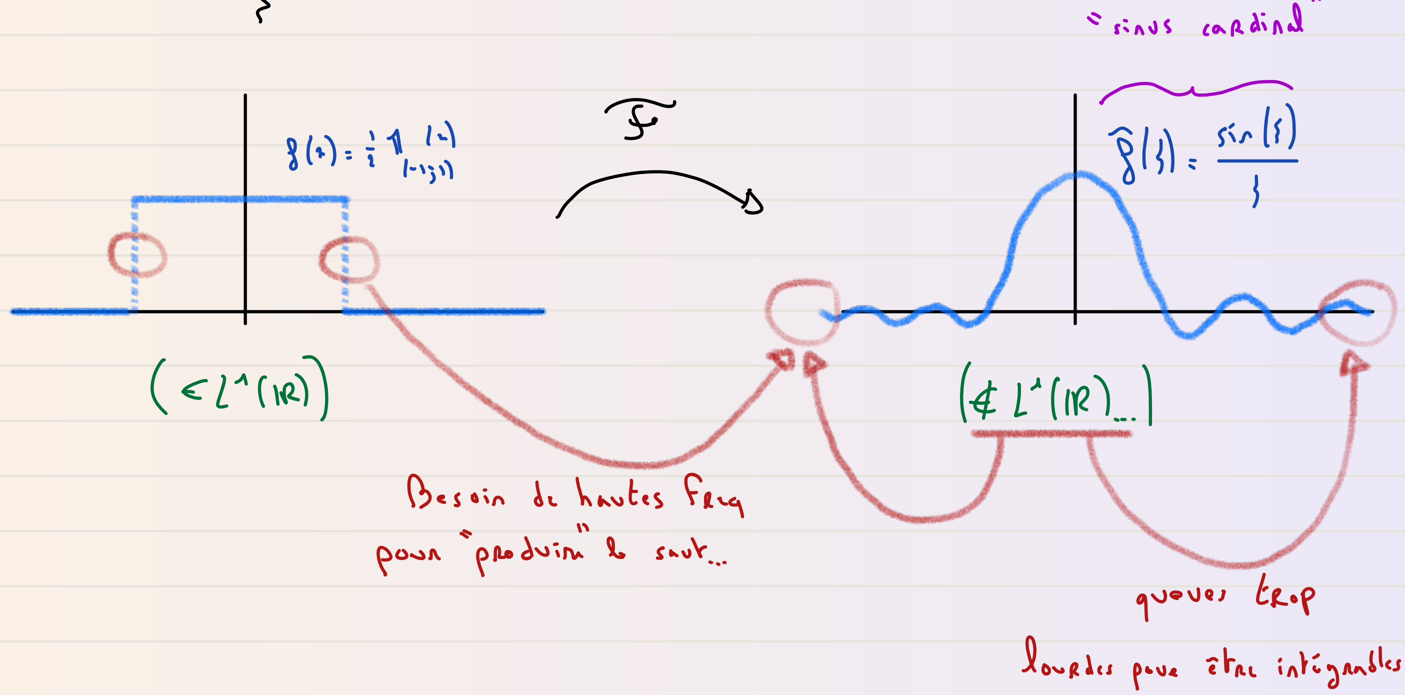
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx \longrightarrow = 1 \text{ si } \xi = 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{e^{-i\xi} - e^{+i\xi}}{-2i\xi}$$

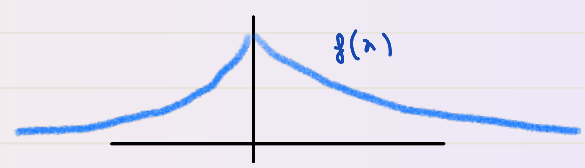
$$= \frac{1}{\xi}\left(\frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i}\right) \qquad \left(\frac{a+ib-(a-ib)}{2i} = b\right)$$

$$= \frac{\sin \xi}{\xi}$$ (encore "valable pour $\xi = 0$...")



---

2) Pour $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{2} a e^{-|x|}$



$$\hat{f}(\xi) = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-i\xi x} \, dx + \frac{a}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\xi x} \, dx$$

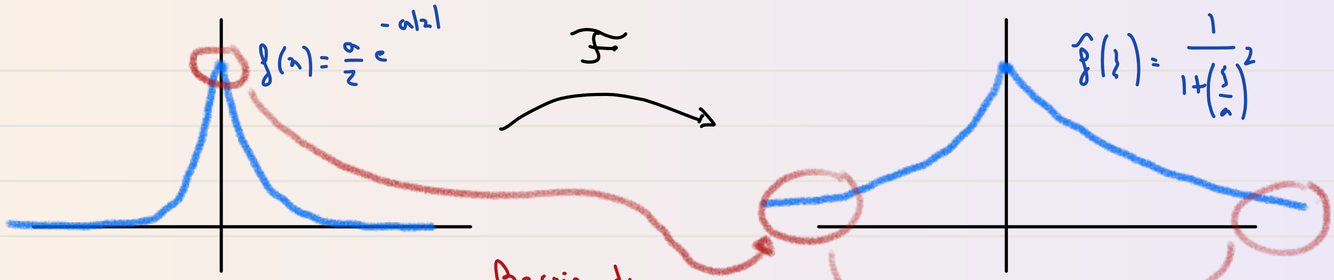
$$= \frac{a}{2} \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{a}{2} \left[\frac{e^{(-a-i\xi)x}}{-a-i\xi} \right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} \right)$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{a+i\xi + a-i\xi}{a^2+\xi^2} \right)$$

$$= \frac{a^2}{a^2+\xi^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{a}\right)^2}$$ ("Cauchy")



Besoin de hautes freq pour "produire" le "pic"...

$\in L^1(\mathbb{R})$

mais queues lourdes (algébriques)