Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

↳ Suite de Fourier : pour rappel, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(\xi) := \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \, dx.$$

↳ Un 3ème exemple (plus difficile...)

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (a > 0)$$

↳ Une gaussienne 

↳ TRÈS RÉGULIÈRE
↳ TRÈS INTÉGRABLE } ☺

↳ des propriétés qu'on va retrouver dans $\hat{f}$...

↳ Le calcul direct de $\hat{f}$ est ambitieux :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-ax^2} e^{-i\xi x}}_{=: \varphi(\xi, x)} \, dx$$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \\ (\xi, x) \mapsto \varphi(\xi, x) = e^{-ax^2} e^{-i\xi x} \end{cases}$$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Domination de φ :

$$|\varphi(\xi,x)| = \left| e^{-ax^2} e^{-i\xi x} \right| = e^{-ax^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

↳ Donc $\hat{f}$ est bien défini et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Domination de $\partial_\xi \varphi$:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi,x) \right| = \left| -ix\, e^{-ax^2} e^{-i\xi x} \right| = |x|\, e^{-ax^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

↳ Donc $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = \hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ix\, e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\, dx$$

c) Une EDO sur $\hat{f}$:

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} \left(-2ax\, e^{-ax^2} \right) e^{-i\xi x}\, dx$$

$$= \frac{i}{2a} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2} \right) e^{-i\xi x}\, dx$$

$$= \frac{i}{2a} \left(\underbrace{\left[e^{-ax^2} e^{-i\xi x} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{x=-\infty}^{+\infty} -i\xi\, e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\, dx \right)$$

$$= -\frac{\xi}{2a} \underbrace{\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x}\, dx}_{=\hat{f}(\xi)\,!}$$

↳ Ainsi, $\dot{\hat{g}}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\hat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

↳ Il faut connaître une valeur de $\hat{g}$ pour avoir un pb de Cauchy bien posé ; or tente

$$\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} (\times 1)\, dx \quad \text{(intégrale de Gauss...)}$$

$$\left(\hat{g}(0)\right)^2 = \left(\int_{x \in \mathbb{R}} e^{-ax^2} dx\right)\left(\int_{y \in \mathbb{R}} e^{-ay^2} dy\right)$$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} dx\,dy$$

Passage en polaire :
$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$
$dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta$

$$= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-ar^2} r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{\infty} r e^{-ar^2} dr$$

$$= \cancel{2}\pi \left[-\frac{1}{\cancel{2}a} e^{-ar^2}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{a}$$

Donc $\hat{g}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (car $\hat{g}(0) = \int e^{-ax^2} > 0$...)

↳ Ainsi, $\hat{g}$ vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{\hat{g}} = -\frac{\xi}{2a}\hat{g} & \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{g}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{cases}$$

↳ Séparation des variables : (EDO pas autonome mais séparation des variables fonctionne pour $\dot{x} = f(x)g(t)$...)

$$\int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\dot{\hat{f}}(\eta)}{\hat{f}(\eta)} d\eta = -\frac{1}{2a}\int_{\eta=0}^{\xi} \eta \, d\eta$$

$$\int_{\eta=0}^{\xi} \frac{d}{d\eta}\left(\log\left(\hat{f}(\eta)\right)\right) d\eta = -\frac{1}{2a}\left[\frac{\eta^2}{2}\right]_{\eta=0}^{\xi}$$

$$\log\left(\hat{f}(\xi)\right) - \log\left(\hat{f}(0)\right) = -\frac{\xi^2}{4a}$$

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}$$ (une gaussienne, encore!)

↳ Morale : Fourier (Gaussienne) = (une autre) gaussienne !

↳ FOURIER DANS $L^1(\mathbb{R})$

- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (continue + bornée)

↳ Continuité pour les intégrales à paramètres

- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$

↳ Immédiat par la déf de $\hat{f}$.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (lemme de Lebesgue-Riemann)

↳ On montre la propriété d'abord pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ (faire une ipp dans $\hat{\varphi}$) puis on étend le résultat par densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^1.

• (Fourier et convolution) si f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f*g : x \mapsto \int_{y\in\mathbb{R}} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{y\in\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy \in L^1(\mathbb{R}),$$

inégalité de convolution de Young

et $\widehat{f*g} = \hat{f} \times \hat{g}$ (7)

↳ Écrire $\widehat{f*g}$ → Fubini → écrire $e^{-i\xi x} = e^{-i\xi(x-y)}\, e^{-i\xi y}$ → Réarranger le tout.

↳ Comme on a vu plus haut, $\text{Fourier}(\underbrace{\text{marche}}_{\in L^1}) = \underbrace{\text{sinus cardinal}}_{\notin L^1}$

↳ Donc, même si $\hat{f}$ est bien défini pour $f \in L^1$, on n'a pas forcément $\hat{f} \in L^1$...

↳ Cependant, si f et $\hat{f}$ dans L^1, on peut reconstruire f à partir de $\hat{f}$

(comme on le faisait pour les séries de Fourier dans $L^2(0,L)$...)

↳ On pose, pour $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\check{g}(x) = \mathcal{F}^{-1}[g](x) := \int_{\xi\in\mathbb{R}} g(\xi)\, e^{+i\xi x}\, dx$,

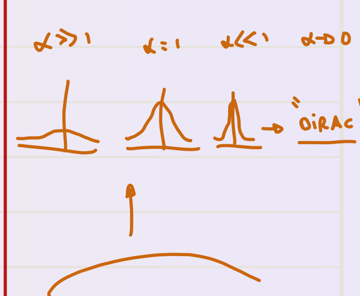
la transformée de Fourier inverse.

• (INVERSION) : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

(8) $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = 2\pi f \quad \text{presque partout}}$

↳ En particulier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ est injective, donc

$$[\hat{f}_1 = \hat{f}_2] \Rightarrow [f_1 = f_2] \quad (9)$$



↳ On montre (8) pour les éléments d'une suite régularisante : $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$ $(\alpha>0)$

On montre (8) pour $\varphi_\alpha * f$ pour $f \in L^1$ t.q. $\hat{f} \in L^1$

On passe à la limite $\alpha \to 0$ dans $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\varphi_\alpha * f) = 2\pi\, \varphi_\alpha * f$.

↳ Pour l'injectivité, puisque Fourier est linéaire, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\mathcal{F}) = \{0_{L^1(\mathbb{R})}\}$. Si $\hat{f} = 0$, alors $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = 2\pi f = 0$ alors $f = 0$.

$$\boxed{\bullet\ (\underline{\text{Destruction de dérivées}})\ \text{Si } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),\ f \text{ et } f' \in L^1(\mathbb{R}),\ \text{et } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0,\ \text{alors}\quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) \qquad (10)}$$

↳ ipp

↳ En particulier, sous les hypothèses déduites du résultat précédent,

$$\boxed{\widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \hat{f}(\xi)} \qquad (11)$$

(Noter que si $f = f(t,x)$ et qu'on ne fait la TL que sur la variable x, (11) devient $\widehat{\partial_{xx} f}(\xi) = -\xi^2 \hat{f}(\xi)$)

↳ Fourier casse (diagonalise) le Laplacien

↳ $\left(e^{-i\xi x} ; -\xi^2\right)_{\xi \in \mathbb{R}}$ sont les éléments propres de ∂_{xx} :

$$\partial_{xx}\left(e^{-i\xi x}\right) = \partial_x\left(-i\xi e^{-i\xi x}\right) = (i\xi)^2 e^{-i\xi x} = -\xi^2 e^{-i\xi x}$$

↳ En dim finie, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, alors ↙ App linéaire... comme ∂_{xx}

$A = P^{-1}DP$ i.e. $Ax = P^{-1}(DPx)$ où $D = \mathrm{diag}(\text{valeurs propres})$

↳ Ici $\partial_{xx} f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}\left[(-\xi^2)\mathcal{F} f\right]$

FIN DE FOURIER...

b) Résolution de la Chaleur par Fourier

↳ On reprend l'éq. de la chaleur sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (11)$$

↳ On y va "à la physicienne" : on va trouver une solution grâce à Fourier en présupposant que toutes les hypothèses requises sont vérifiées. On vérifiera ensuite que la solution trouvée est bien solution du problème de Cauchy (11).

$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$

On applique Fourier s/ la variable x :

$$\widehat{u_t}(t,\xi) = \widehat{u_{xx}}(t,\xi) = -\xi^2\, \widehat{u}(t,\xi)$$

Donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\hat{u}(\cdot,\xi)$ est solution de l'EDO (linéaire)

Fourier transforme l'EDP en EDO !

$$\hat{u}_t(t,\xi) = -\xi^2\, \hat{u}(t,\xi) \qquad t>0 \qquad (12)$$

muni de la donnée initiale $\hat{u}(t=0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$.

↳ On résout : $\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\, \underbrace{e^{-\xi^2 t}}$

ça est une gaussienne donc ça devrait être la TF d'une autre gaussienne...

↳ En effet, pour $f(x) = e^{-ax^2}$, on avait $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

↳ Donc $e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, \mathcal{F}\left[x \mapsto e^{-ax^2}\right](\xi)$

↳ Chez nous $e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = e^{-\xi^2 t}$ donc $\frac{1}{4a} = t$ donc $a = \frac{1}{4t}$

↳ D'où $e^{-\xi^2 t} = \mathcal{F}\Big[x \mapsto \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}}_{=:\, G(t,x)}\Big](\xi) = \hat{G}(t,\xi)$

↳ On a donc $\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \times \hat{G}(t,\xi)$

$\hat{f} \times \hat{g} = \widehat{f * g} \ldots$

$$= \widehat{u_0 * G(t,\cdot)}\,(\xi)$$

Fourier injective

$$\hat{u}(t,\xi) = \widehat{G(t,\cdot) * u_0}\,(\xi)$$

↳ D'où
$$\boxed{\begin{aligned} u(t,x) &= \left[G(t,\cdot) * u_0\right](x) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} G(t, x-y)\, u_0(y)\, dy \end{aligned}}$$

→ J'ai ma solution !

↳ Vérifions que tout fonctionne !

TH (La bonne solution de l'éq. de la Chaleur) $N \geq 1$, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (avec $1 \leq p \leq \infty$)

Alors $u(t,x) := \big(G(t,\cdot) * u_0\big)(x)$ $\quad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N)$

$$= \int_{y \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \times u_0(y)\, dy$$

est la (bonne) solution* du problème de Cauchy (* qui a un "sens physique"...)

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & t>0,\ x\in\mathbb{R}^N, \\ u(0,x)=u_0 & x\in\mathbb{R}^N, \end{cases}$$

au sens suivant :

i) (L'équation intérieure) $u \in \mathcal{C}^\infty\left((0,+\infty)\times\mathbb{R}^N\right)$ (G confère sa régularité à u...), et

↳ C'est l'effet régularisant de la chaleur.

u vérifie $u_t=\Delta u$ sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^N$

ii) (Condition initiale) Si $1\le p<+\infty$, alors

$$u(t,\cdot)\xrightarrow{t\to0^+} u_0 \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^N)$$

(G est une UNITÉ APPROCHÉE lorsque $t\searrow 0^+$...)

iii) (Condition initiale) Si $p=+\infty$ et si de plus $u_0\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$u\in\mathcal{C}\left([0,+\infty)\times\mathbb{R}^N\right)$$

de base, u n'est pas déf. en $t=0$ $\left(G(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\dots\right)$

cependant on peut dans ce cas étendre $u(t,\cdot)$ en $t=0$ par continuité, et dans

$$u(t=0,\cdot)=u_0 \quad \text{i.e. } \forall x_0\in\mathbb{R}^N,\ u(t,x)\xrightarrow[x\to x_0]{t\to0^+} u_0(x_0).$$

(G est une UNITÉ APPROCHÉE lorsque $t\searrow 0^+$...)

↳ PREUVE du i) (N=1)

↳ Le noyau de la chaleur est lui-même une solution de $u_t=u_{xx}$:

$$G_t(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\times\frac{x^2}{4t^2}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$= G(t,x)\left(\frac{x^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right)$$

$$G_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{2x}{4t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}} = -\frac{x}{2t}\, G(t,x)$$

$$G_{xx}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{2t}\, G(t,x)\right) = -\frac{1}{2t}\, G(t,x) - \frac{x}{2t}\, G_x(t,x)$$

$$= G(t,x)\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right)$$

↳ Donc $G_t = G_{xx}$!

↳ <u>Vérifions qu'on peut dériver dans la convolution :</u>

$$u_t(t,x) = \partial_t\left(\int_{y\in\mathbb{R}} \underbrace{G(t,x-y)}\, u_0(y)\, dy\right)$$

↳ est bien dérivable wrt. t et x, Reste à borner

$G_t(t,x-y)u_0(y)$ (=) $G_{xx}(t,x-y)u_0(y)$ par une

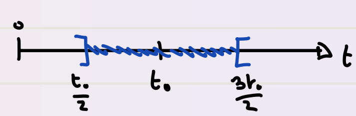
quantité intégrable !

↳ Il faut être un peu subtil : le noyau explose lorsque $t \to 0$...

↳ Cependant, pour montrer que $u_t = u_{xx}$ $\forall t_0 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, il suffit

de montrer qu'on peut faire la CV dominée dans un voisinage ouvert de t_0

(dérivation wrt. t est une propriété locale). Posons $I := \left(\frac{t_0}{2} ; \frac{3t_0}{2}\right)$



↳ Pour $t \in I$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|G_t(t,x-y)\right| = \left|G(t,x-y)\left(\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{1}{2t}\right)\right| \leqslant \left|G(t,x-y)\cdot\frac{(x-y)^2}{4t}\right| + \left|G(t,x-y)\times\frac{1}{2t}\right|$$

$$= \left(\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{1}{2t}\right) G(t,x-y) = \left(\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{1}{2t}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

$\frac{t_0}{2} < t < \frac{3t_0}{2}$

$$\leqslant \frac{1}{t_0}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi t_0}}\left(\frac{(x-y)^2}{2} + 1\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{6t_0}}$$

↳ OR $\exists$ une constante universelle $c>0$ t.q. $\left(\frac{z}{2}+1\right)e^{-\frac{z^2}{4t_0}} \leqslant C e^{-\frac{z^2}{12t_0}} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

↳ En effet $\left(\frac{z}{2}+1\right)e^{-\frac{z^2}{4t_0}} = \left(\frac{z}{2}+1\right)e^{-\frac{2z^2}{12t_0}} = \underbrace{\left(\frac{z}{2}+1\right)e^{-\frac{z^2}{12t_0}}}_{\substack{\text{positif} \\ \text{et uniformément} \\ \text{borné par une cste } c>0 \\ \text{(croissance comparée)}}} \times e^{-\frac{z^2}{12t_0}}$

$$\leqslant \underbrace{\frac{C}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t_0\sqrt{t_0}}}_{=:\tilde{c}} e^{-\frac{(x-y)^2}{12t_0}}$$

↳ Donc $\left| G_t(t,x-y) \right| \leqslant \left| \tilde{c} e^{-\frac{(x-y)^2}{12t_0}} \right|$

$$\left| G_t(t,x-y) u_0(y) \right| \leqslant \left| \overbrace{\underbrace{\tilde{c} e^{-\frac{(x-y)^2}{12t_0}}}_{\in L^q(\mathbb{R})} \underbrace{u_0(y)}_{\in L^p(\mathbb{R})}}^{\text{intégrabilité ? (en } y\text{!)}} \right|$$

$\forall q \in [1;+\infty]$!!

↳ La gaussienne est dans tous les L^p du monde !

$$\int \left(e^{-x^2}\right)^p = \int e^{-px^2} = \int e^{-(\sqrt{p}x)^2} dx$$

= l'intégrale d'une autre gaussienne !

Prendre q t.q. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

↳ (Hölder) $\left| G_t(t,x-y) u_0(y) \right| \in L^1_y(\mathbb{R})$

↳ <u>Conclusion :</u> $\partial_t u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \partial_t G(t,x-y) u_0(y)\, dy$

↳ <u>idem</u> $\partial_{xx} u(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \partial_{xx} G(t,x-y) u_0(y)\, dy$

Et donc $(\partial_t - \partial_{xx}) u(t,x) = 0$ sur $\left(\frac{t_0}{2};\frac{3t_0}{2}\right)\times\mathbb{R}$, $\forall t_0>0$... $\square$