Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

↳ On a vu l'équation de la Chaleur sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

↳ La (bonne) solution classique s'écrit $u(t,x) = [G(t,\cdot) * u_0](x)$

$$= \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\, dy \qquad (13)$$

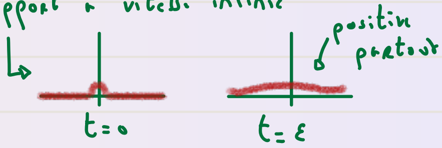
↳ <u>Quelques conséquences</u> :

1) Si $u_0(x) \geq 0$ pp $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $u(t,x) \geq 0 \quad \forall t>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Si $u_0(x) \geq 0$ pp $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $\underbrace{u(t,x) > 0}$ $\forall t>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
ET $u_0 \not\equiv 0$

↳ propagation du support à vitesse infinie

↳ Conséquence de la forme explicite (13)



2) (Principe de comparaison) En conséquence du premier point (poser $u := \bar{u} - \underline{u}$)

les sol. qui émergent de $\underline{u}_0$ et $\bar{u}_0$

• Si $\underline{u}_0(x) \leq \bar{u}_0(x)$ pp $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $\underline{u}(t,x) \leq \bar{u}(t,x) \quad \forall t>0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

• Si $\underline{u}_0(x) \leq \bar{u}_0(x)$ pp $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $\underline{u}(t,x) < \bar{u}(t,x) \quad \forall t>0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
ET $\underline{u}_0 \not\equiv \bar{u}_0$

Séparation stricte !

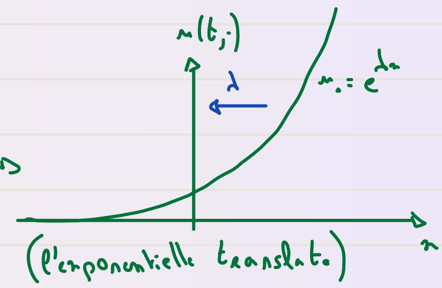
Appliquer le PC 2 fois

↳ <u>Note</u> : La comparaison donne l'unicité : v et w deux sol partant de u_0, alors $\begin{cases} v \leq w \\ w \leq v \end{cases}$ donc $v \equiv w$...

3) On a pris $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ a priori pour utiliser Fourier mais on peut mettre des u_0 éventuellement non-intégrables (u_0 = constante ; $u_0(x) = e^{\lambda x}$, ...) puisque la décroissance rapide de la gaussienne aide à faire converger l'intégrale !

$$[u_0 \equiv k] \Rightarrow [u(t,x) \equiv k]$$

$$[u_0 = e^{\lambda x}] \Rightarrow [u(t,x) = e^{\lambda(x+\lambda t)}]$$



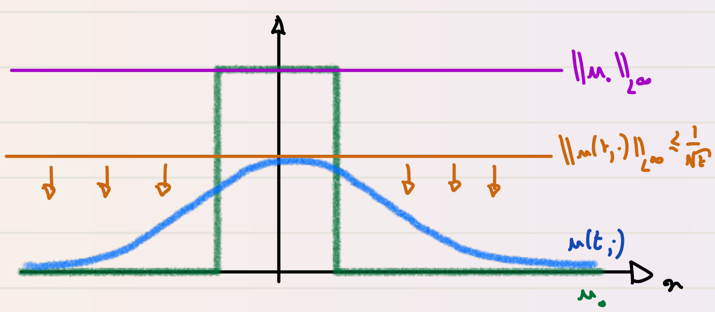
↳ En effet $u_t - u_{xx} = \lambda^2 e^{\lambda(x+\lambda t)} - \lambda^2 e^{\lambda(x+\lambda t)} = 0$

↳ On peut aussi mettre $u_0(x) = e^{\lambda x}$ dans la convolution !

4) <u>Dispersion</u> : Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

$$|u(t,x)| \leq \int_{y\in\mathbb{R}} |G(t,x-y)\, u_0(y)|\, dy \leq \begin{cases} \|u_0\|_{L^\infty} \cdot \underbrace{\int_{y\in\mathbb{R}} G(t,x-y)\, dy}_{=1} = \|u_0\|_{L^\infty} \\ \underbrace{\|G(t,\cdot)\|_{L^\infty}} \cdot \int |u_0| = \frac{C}{\sqrt{t}} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \underbrace{e^{-\frac{x^2}{4t}}}_{=1 \text{ au max}}$$

↳ 

↳ Convergence uniforme vers 0 !

↳ Étalement de la densité

↳ En dimension N : $G(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x^2|}{4t}} \longrightarrow \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{N/2}}$.

5) Conservation de la masse :

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}} G(t,x-y)\,u_0(y)\,dy\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{y\in\mathbb{R}} \underbrace{\int_{x\in\mathbb{R}} G(t,x-y)\,dx}_{z=x-y}\; u_0(y)\,dy$$

$$= \int_{y\in\mathbb{R}} \underbrace{\int_{z\in\mathbb{R}} G(t,z)\,dz}_{=1}\; u_0(y)\,dy$$

$$= \int_{y\in\mathbb{R}} u_0(y)\,dy \qquad \text{(La masse est préservée !)}$$

3) Équation de la Chaleur en présence de bords

a) Chaleur en ½ espace et introduction des différentes conditions de bord

On a vu que $u_t = u_{xx}$ sur $\mathbb{R}$ préserve la masse de la population.

↳ Regardons maintenant : $u_t = u_{xx}$ $\quad t>0,\ x>0$

Dérivée d'ordre 1 en temps ↝ 1 degré de liberté à fixer
↝ Besoin d'une donnée initiale

Dérivée d'ordre 2 en espace
↳ 2 degré de liberté à fixer
↳ Besoin de 2 conditions de bord
↳ Sur $\mathbb{R}$, on imposait $u(t,\pm\infty)=0$...

On impose donc naturellement $u(t,+\infty)=0$ et on va donner une condition de bord en $x=0$ pour fixer tous les degrés de liberté :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0,\ x>0 \\ u|_{t=0} = u_0 & t=0,\ x>0 \\ \text{CONDITION DE BORD} & t>0,\ x=0 \end{cases}$$

↳ Regardons la masse : $M(t) := \int_{x=0}^{\infty} u(t,x)\,dx$

↳ On voudrait une B^c pour préserver la masse :

$$0 = M'(t) = \int_{x=0}^{\infty} u_t(t,x)\,dx = \int_{x=0}^{\infty} u_{xx}(t,x)\,dx \overset{(15)}{=} \underbrace{u_x(t,\infty)}_{=0} - u_x(t,0)$$

Donc pour préserver la masse, il faut : $-u_x(t,0) = 0$: Condition de Neumann... (homogène car RHS $= 0$)

↳ La quantité $-u_x(t,0)$ pilote la variation de masse dans le système :

$$\begin{cases} -u_x(t,0) > 0 \Rightarrow M' > 0 \Rightarrow M \nearrow \\ -u_x(t,0) < 0 \Rightarrow M' < 0 \Rightarrow M \searrow \end{cases}$$

On appelle $-u_x(t,0)$ le <u>FLUX ENTRANT</u>.

↳ En dimension N, la formule de Green (ipp de dimension supérieure) donne à la place de (15) :

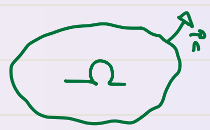
$$\int_{\Omega} \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,d\sigma$$

mesure de surface

En dim 2 : $\nabla u \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$

produit scalaire

Vecteur normal unitaire sortant :



↳ Ce qui donne bien, en 1D :

$\partial_n u = u_x \cdot (-1) = -u_x$

↳ À la place de Neumann, on peut dire que le flux sortant (moins le flux entrant) est proportionnel à la densité en $x=0$ (une certaine "proportion des individus "s'échappe" du domaine :

$+u_n(t,\cdot) = \alpha\, u(t,0) \iff -u_n(t,0) = -\alpha\, u(t,0)$: Conditions de ROBIN

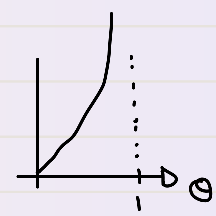
intensité de sortie ($\alpha = 0 \to$ Neumann)

$$\iff -\frac{u_n(t,\cdot)}{\alpha} = u(t,0) \qquad (16)$$

↳ On peut ensuite envoyer $\alpha \to +\infty$ pour éjecter systématiquement les individus du domaine : en passant formellement à la limite dans (16) :

$u(t,0) = 0$: Conditions de Dirichlet

↳ Pour mettre les 3 conditions ensemble, on peut prendre les conditions de Robin et poser $\alpha = \frac{\theta}{1-\theta}$. Alors α parcourt $\mathbb{R}_+ \iff \theta$ parcourt $[0,1)$

(Donc on capte bien tous les $\alpha \geq 0$ en faisant ça )

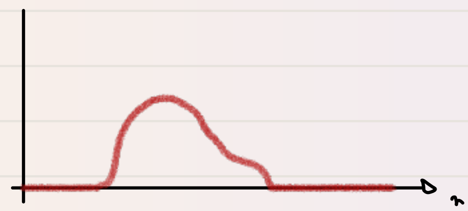
Et alors $\quad -u_n(t,0) = \frac{\theta}{1-\theta}\, u(t,0)$

$$\Updownarrow$$

$$(1-\theta)(-u_n(t,0)) + \theta\, u(t,0) = 0 \qquad (\theta \in [0,1])$$

↳ Robin "interpole" entre Neumann et Dirichlet :

↳ Résolution de la Chaleur s/ $\mathbb{R}_+^*$ avec Conditions de Neumann

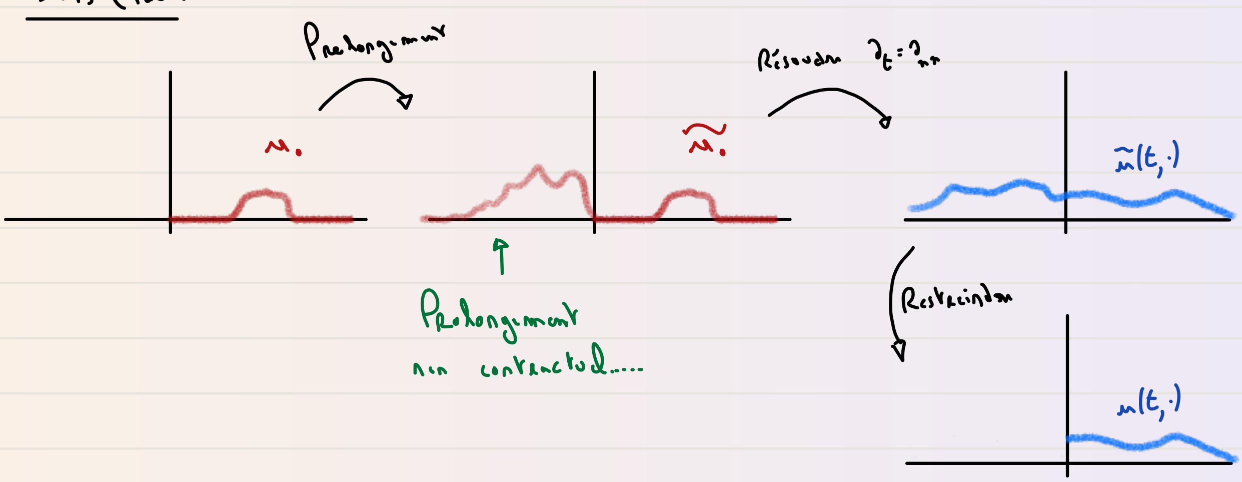
$u_0 :=$ 

On ne peut pas utiliser Fourier (en tout cas, pas directement)

↳ Idée : Puisqu'on sait résoudre la Chaleur s/ $\mathbb{R}$ tout entier, essayons de prolonger u_0 intelligemment s/ $\mathbb{R}$ en $\tilde{u}_0$ de sorte que la solution $\tilde{u}$ partant de $\tilde{u}_0$ vérifie que $u := \tilde{u}|_{x>0}$ est la solution du problème de Cauchy en question, ici :

$$
(17)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0,\ x>0, \quad \text{(Eq intérieure)} \\ -u_x|_{x=0} = 0 & t>0,\ x=0 \quad \text{(BC)} \\ u|_{t=0} = u_0 & t=0,\ x>0, \quad \text{(IC)} \end{cases}
$$

Dans l'idée :



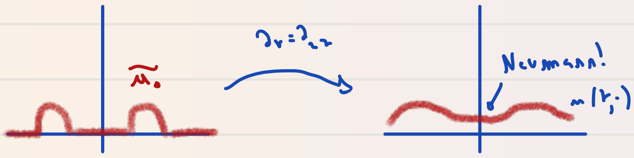
↳ Pour Neumann, le prolongement pair semble une bonne idée :

↳ On a vu précédemment que le processus de la chaleur n'a pas de direction privilégiée ; autrement dit,

$$[u_0 \text{ pair}] \Rightarrow [u(t,\cdot) \text{ pair } \forall t>0]$$

↳ On a vu précédemment que le processus de la chaleur est régularisant (héritage de la régularité du Noyau gaussien) : $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (c'est suffisant ici...)

En utilisant Taylor, j'ai donc $$u_x(t,0) = \frac{u(t,h)-u(t,-h)}{2h} + o(1)$$



$$= \frac{u(t,h)-u(t,h)}{2h} + o(1) = o(1) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

↳ Cherchons une expression pour la solution : Pour $\tilde{u}_0(x) = (\text{prolongement pair de } u_0)(x)$

$$= \begin{cases} u_0(x) & x>0 \\ u_0(-x) & x<0, \end{cases}$$

on a : $$\tilde{u}(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} G(t,x-y)\,\tilde{u}_0(y)\,dy$$

$$= \int_{y=-\infty}^{0} G(t,x-y)\,\tilde{u}_0(y)\,dy + \int_{y=0}^{\infty} G(t,x-y)\,\tilde{u}_0(y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_{y=-\infty}^{0} G(t,x-y)\,u_0(-y)\,dy}_{z:=-y \quad dz=-dy} + \int_{y=0}^{\infty} G(t,x-y)\,u_0(y)\,dy$$

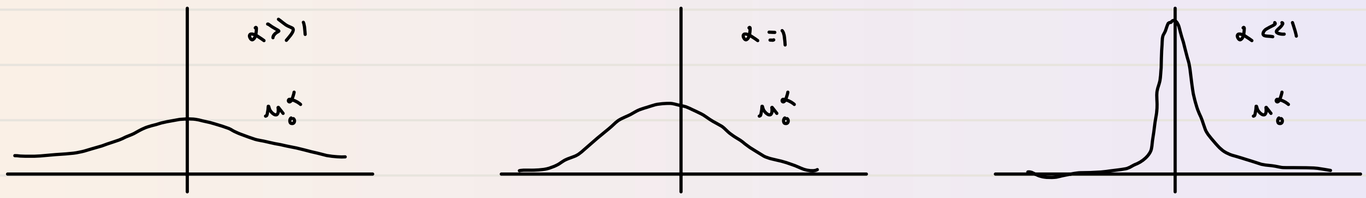
$$= \int_{z=0}^{\infty} G(t,x+z)\,u_0(z)\,dz + \int_{y=0}^{\infty} G(t,x-y)\,u_0(y)\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \underbrace{\left[G(t,x-y) + G(t,x+y)\right]}_{=:\,H^N(t,x,y)} u_0(y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_{y\in\mathbb{R}_+}}_{\text{Intégrale si le domaine}} \underbrace{H^N(t,x,y)}_{\text{Solution Fondamentale}}\, \underbrace{u_0(y)}_{\text{donnée initiale}}\,dy$$

→ Comme pour la chaleur dans $\mathbb{R}$, on a une formule de représentation de la solution...

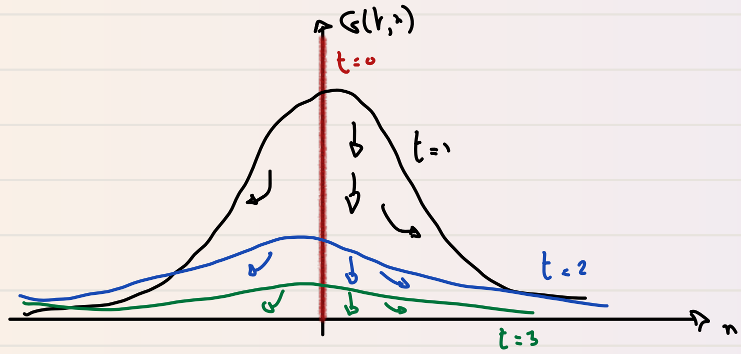
↳ La solution fondamentale représente la densité d'une population initialement concentrée en un point : sur $\mathbb{R}$ par exemple, si $u_0^\alpha(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$



$\alpha \to 0 \Rightarrow u_0^\alpha$ = approximation de l'unité : "Dirac"

Alors $u^\alpha(t,x) = \left(G(t,\cdot) * u_0^\alpha\right)(x) \xrightarrow{\alpha \to 0} G(t,x)$

↳ Densité des individus si on les lâche tous en $x = 0$



↳ De la même manière pour la chaleur s/ $\mathbb{R}_+$ avec Neumann,

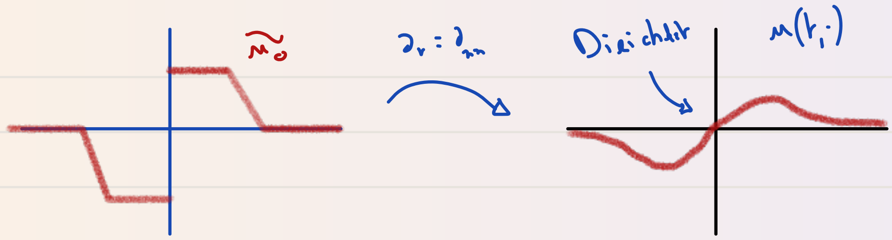
$$\tilde{H}(t,x,y_0) \underset{\text{Formellement}}{=} \int_{y=0}^{\infty} \tilde{H}(t,x,y)\, \delta_{y_0}(y)\, dy$$ représente la densité pour une donnée

concentrée en $y_0 > 0$...

↳ Pour les conditions de Dirichlet, on prolonge de manière

<u>IMPAIRE</u> : $\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x > 0 \\ -u_0(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tilde{u}(t,\cdot) \text{ impaire} \\ \tilde{u}(t,\cdot) \text{ lisse (effet rég.)} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tilde{u}(t,0) = 0 \quad \forall t > 0 \\ \text{(même si ça n'était pas le cas à } t = 0 \text{ !)} \end{array}\right]$



↳ En effet, puisque $u(t,\cdot)$ continue, $u(t,h) \xrightarrow{h\to 0} u(t,0)$

$u(t,-h) \xrightarrow{h\to 0} u(t,0)$

donc $$\underbrace{\frac{u(t,h)+u(t,-h)}{2}}_{= \frac{u(t,h)-u(t,h)}{2} = 0 \ \forall h>0 \dots} \xrightarrow{h\to 0} u(t,0)$$

donc $u(t,0) = 0$!

↳ Solution fondamental pour Dirichlet:

$$\tilde{u}(t,x) = -\int_{y=-\infty}^{0} G(t,x-y)\, u_0(y)\, dy + \int_{y=0}^{\infty} G(t,x-y)\, u_0(y)\, dy$$

$$= -\int_{z=0}^{\infty} G(t,x-z)\, u_0(z)\, dz + \int_{y=0}^{\infty} G(t,x-y)\, u_0(y)\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \underbrace{\left[G(t,x-y) - G(t,x+y) \right]}_{=: H^0(t,x,y)} u_0(y)\, dy$$

↳ La solution fondamental

↳ Notez que si "$u_0 = \delta_{x=0}$", alors $u(t,x) \equiv 0$ $\forall t>0, \forall x \in \mathbb{R}$

(On fait immédiatement sortir tout le monde)

↳ Vitesse de décroissance L^∞ : Pour la chaleur, on avait

$$|u(t,x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |G(t,x-y)u_0(y)|\,dy \leq \|G(t,\cdot)\|_{L^\infty}\cdot \underbrace{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R})}}_{\text{(la masse)}}$$

et $$\|G(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \left\|\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{\cdot^2}{4t}}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} = \frac{c}{\sqrt{t}}$$

↳ Donc $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}}$

($a(t) \lesssim b(t)$ ssi (DÉF) $\exists c>0$ indépendant de t tq $a(t) \leq c\, b(t)$)

↳ Pour Neumann:

$$|H^N(t,x,y)| = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left[\underbrace{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}_{\leq 1} + \underbrace{e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}}_{\leq 1}\right] \leq \frac{2}{\sqrt{4\pi t}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

↳ Pour Dirichlet

$$|H^D(t,x,y)| = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right|$$

$$\leq \frac{2|y|}{\sqrt{4\pi t}} \sup_{\xi\in(x\pm y)} \left|\frac{\xi}{2t}\, e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\right|$$

Accroissements finis :

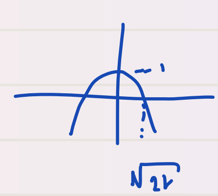
$|g(b)-g(a)| \leq |b-a|\cdot\|g'\|_{L^\infty}$

↳ ici: $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$g'(x) = \frac{x}{2t}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$$\leq \frac{|y|}{\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \underbrace{\left|\xi\, e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\right|}_{\psi(\xi)}$$

$$\psi'(\xi) = \underbrace{\left(1 - \frac{\xi^2}{2t}\right)}\, e^{-\frac{\xi^2}{4t}}$$



ξ	0	$\sqrt{2t}$	∞
ψ	↗		↘

↳ Donc $\psi(y) \leq \psi(\sqrt{2r}) = \sqrt{2t}\, e^{-\frac{2r}{4r}} = \sqrt{2r}\, e^{-\frac{1}{2}}$

D'où $|H^D(r,x,y)| \leq \frac{|y|}{\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} \sqrt{2r} \times \frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{2}{e\pi}} \cdot |y| \cdot \frac{1}{t} \lesssim \frac{1}{t}$!

Et instantanément 0 si $y = 0$...

↳ Moralité : Neumann $\left(\|u(r,\cdot)\|_\infty \lesssim \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ vs. DIRICHLET $\left(\|u(r,\cdot)\|_\infty \lesssim \frac{1}{t}\right)$:

↳ On décroît + vite avec Dirichlet qu'avec Neumann

↳ Le "coût de sortie" se paie par un $\times \frac{1}{\sqrt{t}}$ en norme infinie...

↳ Analogue à ajouter une dimension d'espace $\left(\|u(r,\cdot)\|_{L^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{N+1}{2}}}\right)$