Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

↳ Précédemment, on a vu :

- La chaleur dans $\mathbb{R}^{(n)}$
- La chaleur dans $\mathbb{R}_+^*$ avec conditions de :

↳ Neumann $(-u_x(t,0)=0)$

↳ Dirichlet $(u(t,0)=0)$

↳ Robin $(-u_x(t,0)=\nu u(t,0))$.

↳ Qu'en est-il de la chaleur sur un segment : $\Omega=(0,1)$?

b) Équation de la chaleur sur un segment

↳ Dans cette note, on va voir comment résoudre le problème

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0, \quad x\in(0,1) \\ -u_x(t,0)=u_x(t,1)=0 & t>0, \quad x\in\{0,1\} \quad \text{(Neumann)} \\ \text{ou} & \\ u(t,0)=u(t,1)=0 & t>0, \quad x\in\{0,1\} \quad \text{(Dirichlet)} \\ u|_{t=0}=u_0 & t=0, \quad x\in(0,1) \end{cases}$$

↳ On va exhiber l'existence d'une solution classique $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*;L^2(0,1))$

avec $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*;L^2(0,1)) := \left\{ v : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to L^2(0,1) \\ t \mapsto v(t,\cdot) \end{cases} \text{ et } v \text{ continûment différentiable}^* \right\}$

* i.e. $\forall t>0, \exists\, \partial_t v(t,\cdot) \in L^2(0,L)$ tq $\lim_{h\to 0} \left\| \partial_t v(t,\cdot) - \frac{v(t+h,\cdot)-v(t,\cdot)}{h} \right\|_{L^2(0,L)} = 0$

et $\partial_t v(t,\cdot)$ est continu wrt. t : $\lim_{h\to 0} \| \partial_t v(t+h,\cdot) - \partial_t v(t,\cdot) \|_{L^2(0,L)} = 0$.

↳ <u>Pour montrer l'unicité</u> : utiliser la <u>décroissance de l'énergie L^2</u> : $E(t) = \int_{-L}^{L} u(t,x)\,dx$

↳ cf. la note n°3 (p. 6-7)

↳ Pour rappel, on sait que $\left(e^{\frac{2i\pi k x}{L}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base de $L^2(0,L)$.

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{\frac{2i\pi k x}{L}}$$

↳ Si f est à valeurs réelles, alors $\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$ et on peut regrouper les termes positifs et négatifs de la somme :

$a_0 = \frac{1}{L}\int f$ $\quad a_k = \frac{2}{L}(f; \cos_k)$ $\quad b_k = \frac{2}{L}(f; \sin_k)$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) + b_k \left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\right)$$

↳ i.e. $\left(1, \left(\cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}, \left(\sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ est une base Hilbertienne de $L^2((0,L);\mathbb{R})$ (modulo coef de renormalisation...)

↳ Noter qu'on peut faire la même chose sur $(-L;L)$:

$$\forall \tilde{f} \in L^2(-L;L),\quad \tilde{f}(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{a}_k \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) + \tilde{b}_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\right)$$

↳ Si $\tilde{f}$ pair, alors $\tilde{b}_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (ne restent que la moyenne et les cos)

↳ Si $\tilde{f}$ impair, alors $\tilde{a}_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (ne restent que les sin)

↳ Donc, pour $f \in L^2((0,L);\mathbb{R})$, on peut poser

$\tilde{f}^p$ son prolongement pair s/ $L^2((-L;L);\mathbb{R})$, développer en séries de Fourier en éliminant les sin puis prendre $f = \tilde{f}^p|_{x\in(0,L)}$:

$$f(x) = \tilde{a}_0^p + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k^p \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

↳ Donc (modulo coef de renormalisation), $\left(1, \left(\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$ forme une base hilbertienne de $L^2((0,L);\mathbb{R})$

↳ De même, par prolongement impair, on montre que $\left(\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme une base hilbertienne de $L^2((0,L);\mathbb{R})$

↳ Revenons au pb de la chaleur: On cherche une solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*; L^2(0,L))$

Donc $\forall t>0$, $u(t,\cdot) \in L^2(0,L)$

↳ Regardons d'abord le problème avec BC de Dirichlet: $u(t,0) = u(t,L) = 0$

↳ Pour cela la "base sinus" de $L^2(0,L)$ se prête bien à l'analyse puisque $\varphi_k(x) := \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$ vérifie les BC de Dirichlet $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

↳ On écrit donc $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$ (17)

pour chaque $t>0$, on a éventuellement un coefficient de Fourier ≠...

↳ On envoie (17) dans l'équation $u_t = u_{xx}$: (en admettant a priori que les $(\alpha_k'(t))_{k\geq 1}$ et $(k^2 \alpha_k(t))_{k\geq 1}$ sont sommable (ce sera effectivement le cas...) et ça nous permettra de vérifier notre solution!)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k'(t) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

↳ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left(\alpha_k'(t) + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \alpha_k(t)\right)\right) = 0$ dans $L^2(0,L)$

donc nécessairement, $\begin{cases} \alpha_k'(t) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \alpha_k(t) \\ \alpha_k(0) = \alpha_k^0 = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{cases}$ (ce sont plein d'EDO linéaires à $k \geq 1$ fixé)

Pb de Cauchy

coef de normalisation indolore

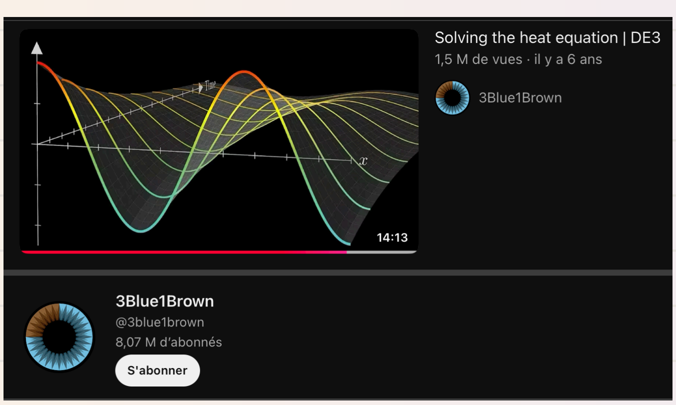
sont connus!

↳ $\alpha_k(t) = \alpha_k^0 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$

↳ Ainsi la solution s'écrit :

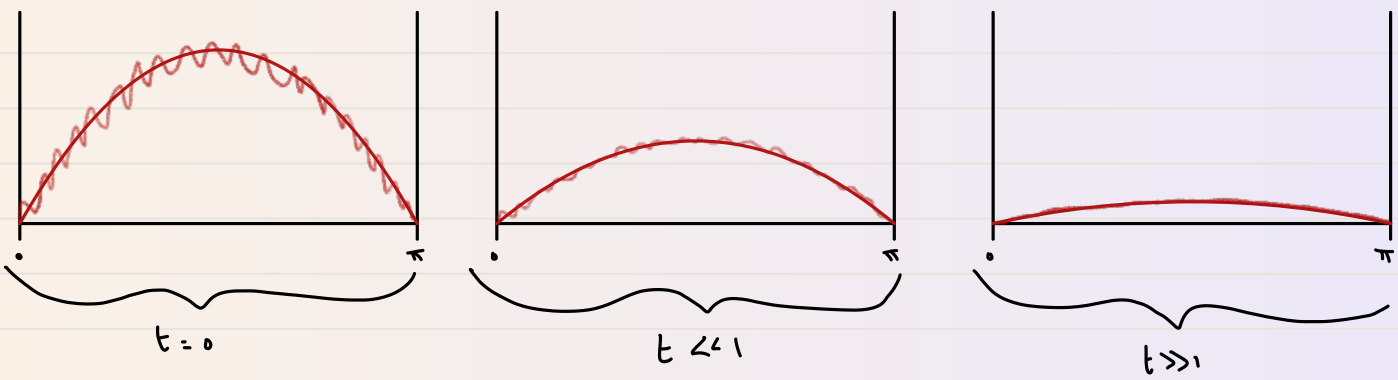
Les fréquences sont mangées d'autant plus vite qu'elles sont hautes : c'est un aperçu de l'effet régularisant !

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$



Aller voir la superbe vidéo de 3Blue1Brown sur Youtube!

↳ Eg : si $L = \pi$ et $u_0 = \sin(x) + 0{,}1 \sin(20x)$:



↳ <u>Exercice</u> : Résoudre la chaleur Neumann sur $(0,L)$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0, \quad 0<x<L \\ -u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0 & t>0, \quad x \in \{0,L\} \end{cases}$$

en utilisant la base des cosinus cette fois-ci.

---

4) Une (petite) introduction à la théorie des Semi-groupes

(↳ qui unifie tout ce qu'on a vu jusqu'ici!)

↳ <u>Motivation</u> : Quel est le point commun entre tous ces problèmes ? :

(1) $\dot{x} = 2x$ (2) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases}$ (3) $u_t = u_{xx}$ $t>0, x \in \mathbb{R}$

(4) $\begin{cases} u_t = u_{xx} & t>0, \quad 0<x<L \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & t>0, \quad x \in \{0,L\} \end{cases}$ (5) $u_t = -\nabla u_x$ $t>0, \quad x \in \mathbb{R}$ ETC. ?

↳ <u>Réponse</u> : ils concernent tous des équations d'évolution linéaires du type

$$\frac{d}{dt} x = \mathcal{A} x, \quad t>0$$

sur un espace de Banach $\mathcal{X}$ ($\mathcal{A}$ est un opérateur $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$) :

	$\mathcal{X}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{D}(\mathcal{A})$
(1)	$\mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}$
(2)	$\mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\mathbb{R}^2$
(3)	$L^2(\mathbb{R})$	Δ	$H^2(\mathbb{R}) = W^{2,2}(\mathbb{R})$
(4)	$L^2(0,L)$	Δ	$H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)$
(5)	$L^2(\mathbb{R})$	∇	$H^1(\mathbb{R})$

↳ On sait écrire la solution pour chacun des 5 pb précédents :

(on crée un pb de Cauchy en ajoutant une donnée initiale)

Eq	solution partant d'une donnée initiale
(1)	$n(t) = e^{2t} n_0$
(2)	$X(t) = e^{tA} X_0$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
(3)	$u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * u_0$
(4)	$u(t,\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 e^{-\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t} \varphi_k$
(5)	$u(t,\cdot) = u_0(\cdot - vt)$

Qu'on va écrire

$$X(t) = \mathcal{S}(t) X_0 \quad \text{ou encore} \quad = e^{t\mathcal{A}} X_0$$

(parce que c'est classe d'écrire $e^{t\Delta}$ ...)

↳ On pourra vérifier que tous les opérateurs $(\mathcal{S}(t))_{t>0}$ définis précédemment ont les propriétés communes suivantes :

<u>DÉF</u> ($\mathcal{C}^0$-Semi-groupe) : Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach (eg. $L^1, L^2, L^p, L^\infty, \mathbb{R}, \mathbb{R}^N$...)

on dit qu'une famille d'opérateurs bornés $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X} \to \mathcal{X})$ est un <u>$\mathcal{C}^0$-semigroupe</u> si

À $t=0$ $\mathcal{S}(0)X_0$ redonne X_0

1) $\mathcal{S}(0) = Id_{\mathcal{X}\to\mathcal{X}}$

Évolution autonome : la dynamique ne dépend pas du temps...

2) $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, \quad \mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t) \circ \mathcal{S}(s)$

↳ subir la dynamique pendant s puis pendant t, c'est la subir pendant t+s

3) $\forall X_0 \in \mathcal{X}, \quad \lim_{t \searrow 0^+} \| \mathcal{S}(t) X_0 - X_0 \| = 0$

↳ $\mathcal{S}(t)$ fait évoluer une dynamique de type $\dot{X} = \mathcal{A}X$ jusqu'au temps t en partant d'une donnée X_0...

↳ À partir d'un semi-groupe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ donné, on peut définir son générateur qui exprime la "vitesse instantanée" de l'évolution :

DÉF (Générateur infinitésimal) : On définit le générateur infinitésimal du semi-groupe $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{X}$ ($\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X}$...) défini pour $X \in \mathcal{X}$ (lorsque la limite existe) par

$$AX = \lim_{t \searrow 0^+} \frac{\mathcal{S}(t)X - X}{t}$$

↳ On appelle $\mathcal{D}(A)$ le domaine de A, c'est un sev de $\mathcal{X}$ dense dans $\mathcal{X}$...

↳ Exemple :

$\mathcal{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(t)x = e^{2t}x$ On a bien

1) $\mathcal{S}(0)x = e^{2\times 0}x = x$

2) $\mathcal{S}(t+s) = e^{2(t+s)}x = e^{2t}e^{2s}x$ (c'est aussi pour cela qu'on aime bien la notation $\mathcal{S}(t) = e^{tA}$...)

3) $|\mathcal{S}(t)x - x| = |(e^{2t}-1)x| = |(1+2t+o(t)-1)x|$

$= |2t + o(t)| \cdot |x| \xrightarrow{t \searrow 0^+} 0$

Donc $(e^{2t})_{t\geq 0}$ est bien un $\mathcal{C}^0$-semigroupe sur $\mathbb{R}$...

Et son générateur est :

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{e^{2t}x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{(1+2t+o(t)-1)\,x}{t} = \lim_{t\searrow 0} (2+o(t))x = 2x$$

Donc $A = 2$ et $\mathcal{D}(A) = \mathcal{X} = \mathbb{R}$

PROPOSITION (Équation d'évolution)

Soit $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors $\forall t>0$, $\mathcal{S}(t)x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$,

$t \mapsto \mathcal{S}(t)x_0$ est dérivable, et

$$\partial_t \mathcal{S}(t)x_0 = \mathcal{A}(\mathcal{S}(t)x) = \mathcal{S}(t)(\mathcal{A}x) \qquad \forall t>0$$

↳ **PREUVE :** Calcul préliminaire :

Supposons $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et prenons $t>0$, $h>0$.

On a :

$$\frac{\mathcal{S}(t+h)x_0 - \mathcal{S}(t)x_0}{h} = \frac{\mathcal{S}(t)\mathcal{S}(h)x_0 - \mathcal{S}(t)x_0}{h}$$

linéarité

$$= \mathcal{S}(t)\left[\frac{\mathcal{S}(h)x_0 - x_0}{h}\right]$$

Passage à la limite $h \to 0$ ok car $\mathcal{S}(t)$ borné (continu)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{S}(t+h)x_0 - \mathcal{S}(t)x_0}{h} = \underbrace{\mathcal{S}(t) \lim_{h\to 0}\left(\frac{\mathcal{S}(h)x_0 - x_0}{h}\right)}_{\overset{\text{déf}}{=} \mathcal{A}x_0}$$

↳ Donc $t \mapsto \mathcal{S}(t)$ est dérivable à droite

↳ Montrons la dérivabilité à gauche : (⚠ on ne peut pas écrire $\mathcal{S}$(temps négatif) !)

(Prenons $h < \frac{t}{2}$ qui lui est fini !)

$$\left\| \frac{\mathcal{T}(t)x_0 - \mathcal{T}(t-h)x_0}{h} - \mathcal{T}(t)(\mathcal{A}x_0) \right\|$$

$$= \left\| \frac{\mathcal{T}(t-h+h)x_0 - \mathcal{T}(t-h)x_0}{h} - \mathcal{T}(t-h+h)(\mathcal{A}x_0) \right\|$$

$$= \left\| \mathcal{T}(t-h)\left[\frac{\mathcal{T}(h)x_0 - x_0}{h} - \mathcal{T}(h)(\mathcal{A}x_0) \right] \right\|$$

$$\leqslant \|\mathcal{T}(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \left\| \frac{\mathcal{T}(h)x_0 - x_0}{h} - \mathcal{T}(h)(\mathcal{A}x_0) \right\|$$

$$= \|\mathcal{T}(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \left\| \frac{\mathcal{T}(h)x_0 - x_0}{h} - \mathcal{T}(h)(\mathcal{A}x_0) - \mathcal{A}x_0 + \mathcal{A}x_0 \right\|$$

$$\leqslant \underbrace{\|\mathcal{T}(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\text{Reste à MQ ça reste borné...}} \cdot \Bigg[\underbrace{\left\| \frac{\mathcal{T}(h)x_0 - x_0}{h} - \mathcal{A}x_0 \right\|}_{\xrightarrow{h\to 0}\ 0 \text{ par déf de } \mathcal{A}x_0} + \underbrace{\left\| \mathcal{A}x_0 - \mathcal{T}(h)(\mathcal{A}x_0) \right\|}_{\xrightarrow{h\to 0}\ 0 \text{ par le point 3) de la déf de semi-groupe}} \Bigg]$$

$\longrightarrow$ $h \mapsto \mathcal{T}(t-h)$ est continue de $[0, \frac{t}{2}]$ dans X

Donc $\|\mathcal{T}(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}$ est borné sur $[0, \frac{t}{2}]$ $\left(\text{continue sur le compact } [0, \frac{t}{2}]\right)$

Finalement : $$\left\| \frac{\mathcal{T}(t)x_0 - \mathcal{T}(t-h)x_0}{h} - \mathcal{T}(t)(\mathcal{A}x_0) \right\| \xrightarrow[]{h\to 0} 0$$

Donc $t \mapsto \varphi(t)x_0$ est dérivable à gauche et les dérivées à droite et à gauche coïncident :

$$\partial_t \varphi(t) x_0 = \varphi(t)(A x_0)$$

↳ Reste à montrer que $\varphi(t)$ et A commutent :

$$A(\varphi(t)x) \xleftarrow{h\to 0} \frac{\varphi(h)(\varphi(t)x) - \varphi(t)x}{h}$$

$$= \frac{\varphi(t+h)x - \varphi(t)x}{h}$$

$$= \varphi(t)\left[\frac{\varphi(h)x - x}{h}\right] \xrightarrow{h\to 0} \varphi(t)(Ax)$$

$\varphi(t)$ borné donc continu donc passage à la limite licite. $\square$

↳ Formule de Duhamel (variation de la constante)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow x(t) = e^{at} x_0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + f(t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

↳ Solution homogène : $x_H(t) = e^{at} x_0$

Variation de la constante pour une solution particulière :

$$x_p(t) = e^{at} \times c(t)$$

$$\dot{x}_p - a x_p = \cancel{a e^{at} c(t)} + e^{at}\dot{c}(t) - \cancel{a e^{at} c(t)} = f(t)$$

$$\dot{c}(t) = e^{-at} f(t)$$

$$c(t) = \int_{s=0}^{t} e^{-as} f(s)\, ds$$

$$x_p(t) = \underbrace{\int_{s=0}^{t} e^{a(t-s)} f(s)\, ds}$$ (convolution temporelle)

↳ On a ajusté pour que $x_p(0) = 0$

↳ Donc avec $x = x_H + x_p$, la donnée n'est portée que par x_H

↳ Solution du pb de Cauchy : (la seule qui fonctionne grâce à Cauchy-Lipschitz)

$$\boxed{x(t) = e^{at} x_0 + \int_{s=0}^{t} e^{a(t-s)} f(s)\, ds.}$$

↳ On peut généraliser ça aux semi-groupes :

PROPOSITION (Formule de Duhamel) : Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un $\mathcal{C}^0$-semi-grp sur un espace de Banach X et $A : D(A) \to X$ son générateur infinitésimal. Alors, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ ; X) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ ; X)$,

$\exists$ au plus une solution au pb de Cauchy

$$\begin{cases} \overset{\circ}{X} = \mathcal{A} X + f & t > 0 \\ X\big|_{t=0} = X_0 \end{cases}$$

et cette solution s'écrit

$$\underbrace{X(t) = \underbrace{\varphi(t) X_0}_{\text{"Solution" homogène}} + \underbrace{\int_{s=0}^{t} \varphi(t-s) f(s) \, ds}_{\text{"solution particulière"}}}_{\text{Formule de Duhamel...}}$$