Émergence de phénomènes collectifs en dynamique des populations

PREUVE (TH PERSISTANCE VS. EXTINCTION POUR UNE EQ DE RD EN DOMAINE BORNÉ AVEC DIRICHLET.)

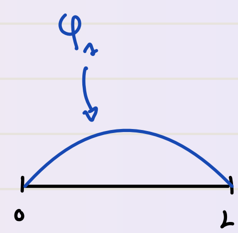
Pour rappel, on considère le pb de Cauchy
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u & t>0, \quad x \in (0,L) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, & t>0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in L^\infty(0,L;\mathbb{R}_+) & x \in (0,L) \end{cases}$$

↳ On sait qu'on peut absorber la réaction linéaire avec une exponentielle temporelle et que la solution s'écrit alors

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_0 ; \varphi_k)_{L^2(0,L)} \, \varphi_k(x) \, e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - \lambda\right] t} .$$

$\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$

↳ Noter que $\varphi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ est positif si $(0,L)$:



↳ On dit que c'est la fonction propre principale et c'est la seule qui ne change pas de signe.

↳ Puisque $u_0 \in L^\infty(0,L) \subset L^2(0,L)$, $(u_0 ; \varphi_1)_{L^2(0,L)}$ a du sens et cette quantité est positive puisque $\varphi_1 > 0$ et $u_0 \geq 0$ si $(0,L)$.

(strictement) ⟶ (si $u_0 \not\equiv 0$...)

↳ La valeur propre $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ (pour le pb aux valeurs propres associé :

$-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ avec Dirichlet) associée à la fonction propre φ_1 est la plus petite :

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 < \lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 < \lambda_3 = \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 < \lambda_4 = \left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 < \ldots\ldots$$

↳ On dit que λ_1 est la valeur propre principale...

↳ On a donc

$$u(t,x) = (u_0, \varphi_1)_{L^2(0,L)}\, \varphi_1(x)\, e^{-\left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - r\right)t} + \sum_{k=2}^{\infty} (u_0 ; \varphi_k)\, \varphi_k(x)\, e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - r\right]t}$$

• Si $L = L^* = \frac{\pi}{\sqrt{r}}$, alors $\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - r = 0$, donc

(persistance sans explosion)

Tous $> \left[\frac{2\pi}{L} - r\right]$

$$u(t,x) = (u_0, \varphi_1)_{L^2(0,L)}\, \varphi_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (u_0 ; \varphi_k)\, \varphi_k(x)\, e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - r\right]t}$$

$$\left| u(t,x) - (u_0 ; \varphi_1)_{L^2} \varphi_1(x) \right| \leqslant e^{-\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 - r\right]t} \sum_{k=2}^{\infty} \left| (u_0 ; \varphi_k)\; \varphi_k(x) \right|$$

$$\leqslant e^{-\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 - r\right]t} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \left| (u_0 ; \varphi_k) \right|}$$

A priori, ça ne cv pas si u_0 est quelconque...

Cependant $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(0,L)$ simplifie les choses :

$$(u_0'', \varphi_k) = \int_0^L u_0''(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx$$

$$= \cancel{\left[u_0'(x) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)}_{=0} \right]_0^L} - \frac{\pi k}{L} \int_0^L u_0'(x) \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx$$

$$= -\cancel{\left[\underbrace{u_0(x)}_{=0} \cos\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \right]_0^L} - \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) dx$$

$$= -\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 (u_0, \varphi_k)$$

Donc $\left|(u_0, \varphi_k)\right| \leqslant \left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 \underbrace{\left|(u_0'', \varphi_k)\right|}_{\text{bornée wrt. } k} \leqslant \frac{c}{k^2} \in \ell_k^1(\mathbb{N}^*)$...

puisque cv vers 0

(lemme de Riemann-Lebesgue...)

Donc $\exists K>0$ tq $\left| u(t,x) - (u_0 ; \varphi_1)_{L^2}\, \varphi_1(x) \right| \leq \underbrace{K e^{-\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 - r\right]t}}_{\xrightarrow{t\to\infty}\ 0}$ $\square$

Pour la preuve des deux autres points, admettons le principe de comparaison suivant (qu'on démontrera plus tard...) :

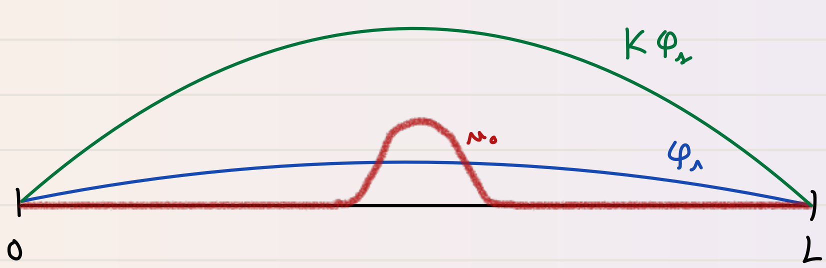
> **PROPOSITION** (Principe de comparaison s/ les données initiales)
>
> Si $\underline{u}_0 \leq u_0 \leq \bar{u}_0$, alors les solutions $\underline{u}$, u et $\bar{u}$ du problème de Cauchy
>
> $$\begin{cases} v_t = v_{xx} + r v & t>0 \quad x \in (0,L) \\ v(t,0) = v(t,L) = 0 & t>0 \end{cases}$$
>
> muni des données initiales respectives $\underline{u}_0$, u_0 et $\bar{u}_0$ vérifient
>
> $$\underline{u}(t,x) \leq u(t,x) \leq \bar{u}(t,x) \qquad \forall t>0,\ \forall x \in (0,L)$$

- Si $L = L^* < \frac{\pi}{\sqrt{r}}$, alors pour K suffisamment grand,

(évanescence...)

$$u_0(x) \leq K \varphi_1(x) = K \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) =: \bar{u}_0(x)$$

↳ Vrai car u_0 bornée et à support compact et φ_1 est positive :



↳ Alors, par comparaison, $\left(e^{t\Delta} u_0 \leq e^{t\Delta} \bar{u}_0\right)$:

$$u(t,x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(K\varphi_1 ; \varphi_k)}_{\text{seul le mode } k=1 \text{ est excité...}} \varphi_k(x)\, e^{-\left[\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 - r\right]t} = K \varphi_1(x)\, e^{-\overbrace{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - r\right]}^{>0 \text{ car } L < L^*}t}$$

$$\leq K e^{-\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - r\right]t} \xrightarrow[\text{UNIFORMÉMENT}]{t\to\infty} 0$$

UNIFORMÉMENT EN x ! Donc dans $L^\infty(0,L)$!

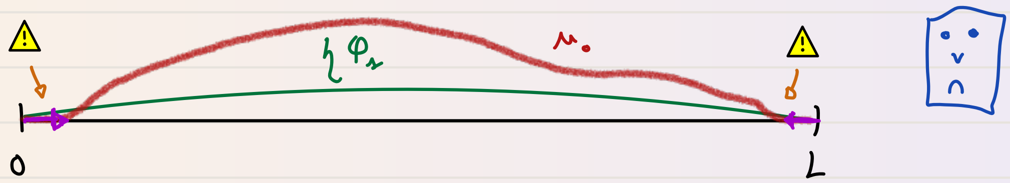
• Si $L = L^* > \frac{\pi}{\sqrt{r}}$: On veut mettre la fonction propre principale sous notre solution pour la faire exploser...

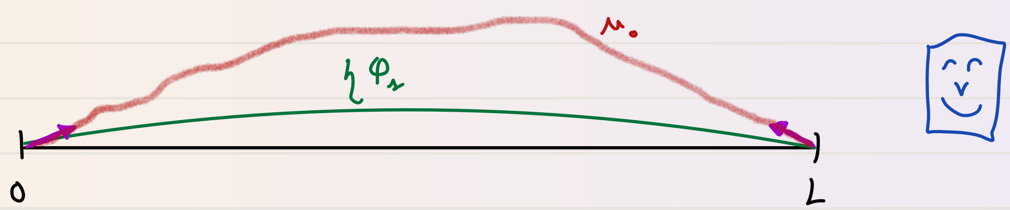
(persistance & explosion)

↳ Quitte à attendre un temps ε, OPSQ $u_0 > 0$ dans $(0,L)$

↳ Maintenant on se dit que pour $\eta > 0$ suff petit, on va avoir

$u_0(x) \geq \eta \varphi_1(x)$, mais attention ⚠ : Pas possible si $u_x(0)$ ou $u_x(L)$ est nul puisque $\varphi'(0)$ et $\varphi'(L)$ sont non triviaux :





↳ Fort heureusement, on a le lemme de Hopf qui élimine la première situation :

LEMME (HOPF PARABOLIQUE) : Soit $T > 0$ et $u \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times (0,L))$ telle que

$$u_t \geq u_{xx} + ru \quad \forall t \in (0,T),\ \forall x \in (0,L) \quad \text{et} \quad u(t,x) \geq 0 \quad \forall t \in (0,T)\ \forall x \in (0,L).$$

Alors pour tout $t_0 \in (0,T)$ tel que $u(t_0, \underset{x=L}{x=0}) = 0$, on a

- ou bien $u \equiv 0$ sur $[0,t_0] \times [0,L]$
- ou bien $u_x(t_0, \underset{x=L}{x=0}) > 0$.

↳ Pour s'en convaincre, regardons le pb en 1/2 espace $\begin{cases} u_t = u_{xx} + ru & t>0,\ x>0 \\ u(t,0) = 0 & t>0 \end{cases}$ qu'on va comparer à la (sous-solution) $\begin{cases} \underline{u}_t = \underline{u}_{xx}, & t>0,\ x>0. \\ u(t,0) = 0 & t>0. \end{cases}$ Par comparaison (admise pour le moment), $\underline{u}(t,x) \leq u(t,x)$. Maintenant, si $M(t) := \int_{x>0} \underline{u}(t,x)dx$, on a $M'(t) < 0$ et $M'(t) = -\underline{u}_x(t,0)$ donc $\underline{u}_x(t,0) > 0$

décroissance (STRICTE) de la masse (qu'on peut vérifier puisqu'on a $\underline{u}$ explicitement)

Et alors $\frac{u(t,h)-u(t,0)}{h} \geq \frac{\underline{u}(t,h)-\underline{u}(t,0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \underline{u}_x(t,0) > 0$ donc $u_x(t,0) > 0$!

↳ Dans notre cas, puisque $u_0 \equiv 0$, on a nécessairement (quitte à attendre un peu...)

$u_x(t,0) > 0$ et $u_x(t,L) > 0$ et donc

$\exists \eta > 0$ (moralement petit) tq $u_0(x) \geq \eta \varphi_1(x) =: \underline{u}_0(x)$, $\forall x \in (0,L)$.

À partir de là, par comparaison, on trouve :

$$u(t,x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (\eta\varphi_1 ; \varphi_k)\varphi_k(x)\, e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - r\right]t}$$

$$= e^{-\left[\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 - r\right]t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$\square$

2) Équations de Réaction-Diffusion dans $\mathbb{R}^N$: cas général

$$(20) : \begin{cases} \partial_t u = \Delta u + \underline{f(u)}, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ u|_{t=0} = u_0, & t = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \Bigg\} \text{ Pb de Cauchy}$$

N'a aucune raison d'être linéaire a priori

↳ Logistique, bistable, etc.

HYPOTHÈSES RAISONNABLES SUR LA NON-LINÉARITÉ f :

↳ $f(0) = 0$ (pas d'individus ⇒ pas de croissance...)

↳ f loc Lip sur $\mathbb{R}$

Qu'on munit de la topologie $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

↳ u_0 bornée uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$ $= BUC(\mathbb{R}^N)$

↳ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \ |x-y| < \eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon$

• À la vue du chapitre 2 sur la Chaleur, et plus précisément la chaleur avec une source, on cherche une solution qu'on peut écrire avec la formule de Duhamel, i.e.

$$u \in \mathcal{C}^0\left([0,T_0] ; BUC(\mathbb{R}^N)\right) =: \mathcal{X}$$

$$\left(u : \begin{cases} [0,T_0] \longrightarrow BUC(\mathbb{R}^N) \\ t \longmapsto u(t) = u(t,\cdot) \end{cases} \right.$$

vérifiant

$$\underset{\text{inconnue}}{u}(t,\cdot) = \overbrace{e^{t\Delta}}^{\text{partie "homogène"}} u_0 + \int_{s=0}^{t} e^{(t-s)\Delta} \overbrace{f(\underset{\text{inconnue}}{u}(s,\cdot))}^{\text{"source"}} \, ds$$

$$= G(t,\cdot) * u_0 + \int_{s=0}^{t} G(t-s,\cdot) * f(\underset{\text{inconnue}}{u}(s,\cdot)) \, ds$$

↳ On va résoudre ça avec un point fixe.

↳ Remarque topologique :

$$\left[\begin{array}{l} [0,T_0] \text{ compact} \\ (BUC(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty) \text{ BANACH} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}), \text{ où } \|u(t,\cdot)\|_{\mathcal{X}} := \overbrace{\sup_{0 \le t \le T_0} \|u(t,\cdot)\|_\infty}^{\text{"}=\sup_t \sup_{\mathbb{R}^N}\text{"}} \\ \text{est un BANACH} \end{array} \right]$$

TH (Solvabilité locale)

=: solution MILD

$\exists T_0 = T_0(u_0 ; f) > 0$ tq (20) possède une unique "solution Duhamel"

↳ On attrapera l'unicité des solutions en utilisant le principe de comparaison :

(Si u et v deux solutions, alors par comparaison : $u \leq v$ et $v \leq u$ donc $u \equiv v$...),

ce qui permettra de dire que la solution Duhamel est LA BONNE SOLUTION de (20).

PREUVE :

↳ Rappel : TH DU POINT FIXE DE BANACH :

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma \text{ espace métrique complet non vide} \\ \phi : \Gamma \to \Gamma \\ \phi \underbrace{\text{contractante}} \\ \quad \exists k \in [0,1) \text{ tq } \forall x,y \in \Gamma, \\ \quad\quad d(\phi(x) ; \phi(y)) \leq k\, d(x,y) \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\exists! \text{ point fixe pour } \phi\right]$$

On considère $\phi : \begin{cases} \mathcal{X} \to \mathcal{X} \\ u \mapsto \phi_u : \begin{cases} [0,T_0] \longrightarrow BUC(\mathbb{R}^N) \\ t \longmapsto \phi_u(t) = G(t,\cdot) * u_0 + \int_{s=0}^{t} G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))\, ds \end{cases} \end{cases}$,

et on prend $\Gamma := \left\{ u \in \mathcal{X} \text{ tq } \forall t \in [0,T_0],\ \|u(t,\cdot) - G(t,\cdot) * u_0\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty} \right\}$

↳ On peut vérifier que Γ est fermé dans $\mathcal{X}$ qui est un Banach,

donc Γ hérite de la complétude de $\mathcal{X}$.

On va à présent montrer 2 points :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{i) } \phi : \Gamma \to \Gamma \\ \text{ii) } \phi \text{ contractante sur } \Gamma \end{array}\right\} \text{ Et donc } \exists! \text{ point fixe dans } \Gamma !$$

i) Soit $u \in \Gamma$, $\left|\phi_u(t) - G(t,\cdot)*u_0\right| = \left|\int_{s=0}^{t} G(t-s,\cdot) * f(u(s,\cdot))\, ds\right|$

$$\leqslant \int_{s=0}^{t} \left|G(t-s,\cdot)*f(u(s,\cdot))\right| ds$$

$$\overset{\text{HÖLDER}}{\leqslant} \int_{s=0}^{t} \underbrace{\cancel{\|G(t-s,\cdot)\|_{L^1}}}_{=1} \cdot \|f(u(s,\cdot))\|_{L^\infty}\, ds$$

$$= \int_{s=0}^{t} \|f(u(s,\cdot))\|_{L^\infty}\, ds \quad (21)$$

↳ Or, si $u \in \Gamma$, on a

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leqslant \underbrace{\|u(t,\cdot) - G(t,\cdot)*u_0\|_{L^\infty}}_{\text{car } u \in \Gamma} + \|G(t,\cdot)*u_0\|_{L^\infty}$$

$$\leqslant \|u_0\|_{L^\infty} + \underbrace{\cancel{\|G(t,\cdot)\|_{L^1}}}_{=1} \cdot \|u_0\|_{L^\infty}$$

$$= 2\|u_0\|_{L^\infty} \quad (22)$$

↳ Notons $K :=$ la constante de Lipschitz de f sur le compact $\left[-2\|u_0\|_{L^\infty} ; 2\|u_0\|_{L^\infty}\right]$.

On a donc

$$\|f(u(s,\cdot))\|_{L^\infty} = \|f(u(s,\cdot)) - \overbrace{f(0)}^{0}\|_{L^\infty}$$

$$\overset{(lip)}{\leqslant} K\|u(s,\cdot)\|_{L^\infty}$$

$$\overset{(22)}{\leqslant} 2K\|u_0\|_{L^\infty} \quad (23)$$

↳ On reprend à partir de (21) :

$$\left|\phi_u(t) - G(t,\cdot) * u_\cdot\right| \overset{(21)}{\leqslant} \int_{s=0}^{t} \|f(u(s,\cdot))\|_{L^\infty} \, ds \overset{(23)}{\leqslant} 2K \int_{s=0}^{t} \|u_\cdot\|_{L^\infty} \, ds$$

$$= 2Kt \|u_\cdot\|_{L^\infty}$$

$$\leqslant 2KT_0 \|u_\cdot\|_{L^\infty}$$

$$\leqslant \|u_\cdot\|_{L^\infty} \text{ si on choisit } T_0 := \frac{1}{2K}$$

φ est stable sur Γ.

↳ OK pour (i). □

---

ii) (Contraction...) Soient $u, v \in \Gamma$,

$$\| \phi u(t) - \phi v(t) \|_{L^\infty} = \left\| \int_{s=0}^{t} G(t-s,\cdot) * \left[f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot)) \right] ds \right\|_{L^\infty}$$

$$\overset{\text{HÖLDER}}{\leqslant} \int_{s=0}^{t} \underbrace{\cancel{\|G(t-s,\cdot)\|_{L^1}}}_{=1} \cdot \|f(u(s,\cdot)) - f(v(s,\cdot))\|_{L^\infty} \, ds$$

$$\leqslant K \int_{s=0}^{t} \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^\infty} \, ds$$

Défini plus haut...

$$\leqslant Kt \sup_{0 \leqslant s \leqslant T_0} \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^\infty}$$

$T_0 = \frac{1}{2K}$

$$\leqslant KT_0 \|u - v\|_{\mathcal{X}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \|u - v\|_{\mathcal{X}}$$

D'où la contraction de ϕ.

↳ OK pour ii) □

↳ Conclusion de cette première partie de la preuve :

∃! point fixe pour ϕ (ie une solution Duhamel) <u>DANS Γ.</u>

↳ Cependant il se pourrait qu'il existe une autre solution dans $X \setminus \Gamma$...