CENTRALE NANTES

UNIVERSITÉ DE NANTES

Analyse numérique – 2026-2027 – TD Liste 3
Méthode des caractéristiques et différences finies pour l'équation de transport
Equation des ondes
(énoncés et indications)

Exercice 1 (Méthode des caractéristiques)
On considère l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall t \in]0,T], \\ u(x,0) = \sin(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Cette équation modélise un phénomène de transport à vitesse $c(x,t) = x$. On s'intéresse à sa résolution par la méthode des caractéristiques.
Les courbes caractéristiques sont les courbes des point $(x(t),t)$ telles que :

$$\begin{cases} x'(t) = c(x(t),t) = x(t), \\ x(0) = a. \end{cases} \tag{2}$$

1. Donner l'expression de $x(t)$ solution de (2).
   On note $\varphi(t) = u(x(t),t)$ la solution le long des courbes caractéristiques.
2. Montrer que $\varphi'(t) = x(t)^2 \, \forall t > 0$.
3. Montrer que $\varphi(t) = \sin(a) + \frac{a^2}{2}(e^{2t} - 1) \, \forall t > 0$.
4. En déduire que $u(x,t) = \sin(xe^{-t}) + \frac{x^2 e^{-2t}}{2}(e^{2t} - 1)$.

Exercice 2 (Schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation de transport)
On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0,\ \forall x \in]0,1[,\ \forall t \in]0,T] \\ u(0,t) = 0,\ \forall t \in [0,T] \\ u(1,t) = 0,\ \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

qui modélise le transport d'une quantité $u(x,t)$ le long d'un tube de longueur $L = 1$, connaissant la quantité initiale $u_0(x)$ et la vitesse de transport constante c. On suppose que la quantité initiale $u_0(x)$ est nulle au voisinage des extrémités du tube, et que T est tel que la quantité est encore nulle aux extrémités à $t = T$.

On considère un maillage espace-temps de $[0,1] \times [0,T]$, de pas $h = \frac{1}{N+1}$ en espace avec les points discrets $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$, et de pas $\Delta t = \frac{T}{M+1}$ en temps avec les instants discrets $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \ldots, M+1$.

Pour $j = 0, \ldots, M+1$ et $i = 1, \ldots, N$, on note $u_i^{(j)}$ l'approximation recherchée de la valeur $u(x_i, t_j)$ de la solution exacte en x_i à t_j, et on notera $u^{(j)}$ le vecteur des $u_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, N$.

On souhaite étudier le schéma de Lax-Friedrichs :

$$\boxed{u_i^{(j+1)} = \frac{u_{i-1}^{(j)} + u_{i+1}^{(j)}}{2} - c\frac{\Delta t}{2h}(u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}),\ i = 1, \ldots, N,\ j = 0, \ldots, M+1}$$

1. **Stabilité en norme $\|.\|_\infty$:**
   (a) On considère un schéma plus général avec un terme source $C^{(j)}$ (qui peut être nul) :
   $$u_i^{(j+1)} = \frac{u_{i-1}^{(j)} + u_{i+1}^{(j)}}{2} - c\frac{\Delta t}{2h}(u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}) + \Delta t C_i^{(j)}$$
   Montrer que :
   $$|u_i^{(j+1)}| \leq \frac{1}{2}|1 + c\frac{\Delta t}{h}||u_{i-1}^{(j)}| + \frac{1}{2}|1 - c\frac{\Delta t}{h}||u_{i+1}^{(j)})| + \Delta t|C_i^{(j)}|$$
   (b) En déduire que sous la condition CFL $\boxed{|c|\Delta t \leq h}$, le schéma de Lax-Friedrichs est stable pour c quelconque :
   $$\forall\, j \text{ tq } j\Delta t \leq T,\ \|u^{(j)}\|_\infty \leq \|u^{(0)}\|_\infty + T \max_j \|C^{(j)}\|_\infty$$
   quels que soient $u^{(0)}$ et $C^{(j)}$.

2. **Consistance en norme $\|.\|_\infty$:**
   On considère l'erreur de consistance :
   $$\varepsilon_h(u)_i^{(j)} = \frac{2u(x_i,t_{j+1}) - u(x_{i-1},t_j) - u(x_{i+1},t_j)}{2\Delta t} + c\frac{u(x_{i+1},t_j) - u(x_{i-1},t_j)}{2h}.$$
   On suppose u assez régulière pour pouvoir écrire des développements de Taylor à l'ordre souhaité. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs est consistant d'ordre 2 en espace et 1 en temps. Plus précisément, montrer que :
   (i) si $|c|\Delta t = h$, alors $\forall\, j$ tq $j\Delta t \leq T,\ \varepsilon_h(u)^{(j)} = 0$,
   (ii) et sinon $\forall\, j$ tq $j\Delta t \leq T,\ \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\|_\infty = O(\Delta t + \frac{h^2}{\Delta t})$, ou plus en détail :
   $$\|\varepsilon_h(u)^{(j)}\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\Delta t + \frac{h^2}{\Delta t} + |c|\frac{h^2}{3}) \max(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|, \sup_{[0,1]\times[0,T]} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|, \sup_{[0,1]\times[0,T]} |\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|)$$
3. **Convergence en norme $\|.\|_\infty$:**
   Montrer que sous la condition CFL $\boxed{|c|\Delta t \leq h}$, le schéma de Lax-Friedrichs est convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps. Plus précisément, en notant $e^{(j)}$ le vecteur des erreurs $u(x_i,t_j) - u_i^{(j)}$, montrer que :
   (i) si $|c|\Delta t = h$, alors $\forall\, j$ tq $j\Delta t \leq T,\ e^{(j)} = 0$,
   (ii) et sinon $\forall\, j$ tq $j\Delta t \leq T,\ \|e^{(j)}\|_\infty = O(\Delta t + \frac{h^2}{\Delta t})$, ou plus en détail :
   $$\|e^{(j)}\|_\infty \leq \frac{T}{2}(\Delta t + \frac{h^2}{\Delta t} + |c|\frac{h^2}{3}) \max(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|, \sup_{[0,1]\times[0,T]} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|, \sup_{[0,1]\times[0,T]} |\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}|)$$

Exercice 3 (Equation de la corde vibrante infinie)
On considère l'équation de la corde vibrante infinie sans terme source :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

1. Transformer l'équation de ce problème avec le changement de variables $X = x - ct$, $T = x + ct$ et la nouvelle fonction $U(X,T) = u(x,t)$.
2. Montrer que $U(X,T) = F(X) + G(T)$ où F est une fonction qui ne dépend pas de T et G une fonction qui ne dépend pas de X. En déduire que $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$.
3. A l'aide des conditions initiales, établir que :
   $$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds$$
4. Déterminer la solution exacte du problème pour les données initiales suivantes :
   $$u_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{et } u_1(x) = 0$$

Indications

Exercice 1
Suivre les indications données dans les questions en s'aidant des exemples du cours.

Exercice 2

1. (a) Transformer le membre de droite en regroupant les terme en $u_{i-1}^{(j)}$, $u_i^{(j)}$ et $u_{i+1}^{(j)}$, puis majorer en valeur absolue.

   (b) Sous cette condition, voir qu'on peut enlever les valeurs absolues des coefficients $1 + c\Delta t/h$ et $1 - c\Delta t/h$ qui sont alors positifs. Puis majorer les termes $u_k^{(j)}$ par $\|u^{(j)}\|_\infty$. On peut simplifier et obtenir que pour tout j :

   $$|u_i^{(j+1)}| \leq \|u^{(j)}\|_\infty + \Delta t |C_i^{(j)}|$$

   En déduire alors l'inégalité demandée.

2. (i) Utiliser la méthode des caractéristiques.
   (ii) Utiliser des développements de Taylor et l'équation dont u est solution.

3. Utiliser la définition de l'erreur de consistance et le schéma numérique. Voir qu'on obtient par différence :

   $$e_i^{(j+1)} = \frac{e_{i-1}^{(j)} + e_{i+1}^{(j)}}{2} - c\frac{\Delta t}{2h}(e_{i+1}^{(j)} - e_{i-1}^{(j)}) + \Delta t \varepsilon_h(u)_i^{(j)}.$$

   En utilisant le résultat de stabilité et la consistance, montrer qu'on obtient les résultats demandés.

Exercice 3

1. Exprimer les dérivées partielles de u en fonction de celles de U. Puis remplacer dans l'équation vérifiée par u. Montrer qu'on obtient :

   $$\partial_{XT}^2 U(T, X) = 0.$$

2. Intégrer cette dernière équation successivement par rapport à X, puis par rapport à T. Puis revenir aux notations initiales.

3. Considérer d'abord $t = 0$ dans l'expression, puis dériver par rapport à t pour retrouver la deuxième condition initiale.

4. Appliquer la formule de la question précédente.