



Analyse numérique (XMS1ME090) – 2026-2027 – TP3
Méthode des différences finies
Equation de transport

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t \in]0, T] \\ u(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(1, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

qui modélise le transport d'une quantité $u(x, t)$ le long d'un tube de longueur $L = 1$, connaissant la quantité initiale $u_0(x)$ et la vitesse de transport c . On suppose que la quantité initiale $u_0(x)$ est nulle au voisinage des extrémités du tube, et que T est tel que la quantité est encore nulle aux extrémités à $t = T$.

Dans ce TP, on souhaite tester plusieurs schémas aux différences finies pour approcher une solution de ce problème pour la quantité initiale suivante, et différentes vitesses c :

$$u_0(x) = \begin{cases} 10(x - 0.4) & \text{si } 0.4 \leq x \leq 0.5 \\ 10(0.6 - x) & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère un maillage espace-temps de $[0, 1] \times [0, T]$, de pas $h = \frac{1}{N+1}$ en espace avec les points discrets $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$, et de pas $\Delta t = \frac{T}{M+1}$ en temps avec les instants discrets $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, M+1$.

Pour $j = 0, \dots, M+1$ et $i = 1, \dots, N$, on note $u_i^{(j)}$ l'approximation recherchée de la valeur $u(x_i, t_j)$ de la solution exacte en x_i à t_j .

Voici les schémas qu'on souhaite tester :

1. Schéma décentré à gauche :

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - c \frac{\Delta t}{h} (u_i^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M$$

2. Schéma décentré à droite :

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} - c \frac{\Delta t}{h} (u_{i+1}^{(j)} - u_i^{(j)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M$$

3. Schéma de Lax-Friedrichs :

$$u_i^{(j+1)} = \frac{u_{i-1}^{(j)} + u_{i+1}^{(j)}}{2} - c \frac{\Delta t}{2h} (u_{i+1}^{(j)} - u_{i-1}^{(j)}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M$$

1. Ecrire un script Python qui effectue les étapes suivantes :

- Choix de la vitesse de transport,
 - Calcul de la subdivision uniforme de $N + 1$ intervalles de $[0, 1]$, de pas $h = \frac{1}{N+1}$,
 - Choix du pas Δt et du temps final T ,
 - Calcul itératif des valeurs $u_i^{(j)}$ par le schéma choisi. **Attention** : cette fois-ci il n'est plus nécessaire d'utiliser une matrice pour faire les différents calculs.
 - Calcul de l'erreur $\max_{i,j} |u_i^{(j)} - u(x_i, t_j)|$, obtenue avec la solution exacte $u(x, t) = u_0(x - ct)$
 - Tracé des points $(x_i, u_i^{(j)})$, $i = 0, \dots, N + 1$ à $t = T$.
2. Valider votre code à l'aide des informations données ci-dessous. Dans le cas $N = 10$, $dt = 0.01$, $c = 2$ et la méthode **décentrée à gauche** voici les vecteurs $U^{(0)}$, $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ (sans les termes de bord) ainsi que les erreurs à l'itération j à obtenir (attention tous les chiffres significatifs ne sont pas donnés!) :

```

1 U^(0) =
2 [0.      0.      0.      0.      0.54545455  0.54545455
3  0.      0.      0.      0.      ]
4 U^(1) =
5 [0.      0.      0.      0.      0.42545455  0.54545455
6  0.12     0.      0.      0.      ]
7 err^(1) = 0.20000000
8 U^(2) =
9 [0.      0.      0.      0.      0.33185455  0.51905455
10 0.2136   0.0264   0.      0.      ]
11 err^(2) = 0.42640000
12 U^(3) =
13 [0.      0.      0.      0.      0.25884655  0.47787055
14 0.2808   0.067584  0.005808  0.      ]
15 err^(3) = 0.37667491

```

Avec les mêmes valeurs mais la **méthode décentrée à droite**, on obtient :

```

1 U^(0) =
2 [0.      0.      0.      0.      0.54545455 0.54545455
3   0.      0.      0.      0.      ]
4 U^(1) =
5 [ 0.      0.      0.      -0.12      0.54545455 0.66545455
6   0.      0.      0.      0.      ]
7 err^(1) = 0.20000000
8 U^(2) =
9 [ 0.      0.      0.0264  -0.2664      0.51905455 0.81185455
10  0.      0.      0.      0.      ]
11 err^(2) = 0.37359999
12 U^(3) =
13 [ 0.      -0.005808  0.090816 -0.4392      0.45463855 0.99046255
14  0.      0.      0.      0.      ]
15 err^(3) = 0.45463854

```

Et enfin avec la **méthode de Lax-Friedrichs** :

```

1 U^(0) =
2 [0.      0.      0.      0.      0.54545455 0.54545455
3   0.      0.      0.      0.      ]
4 U^(1) =
5 [0.      0.      0.      0.21272727 0.21272727 0.33272727
6   0.33272727 0.      0.      0.      ]
7 err^(1) = 0.412727272727273
8 U^(2) =
9 [0.      0.      0.08296364 0.08296364 0.25952727 0.25952727
10  0.20296364 0.20296364 0.      0.      ]
11 err^(2) = 0.6859272727272732
12 U^(3) =
13 [0.      0.03235582 0.03235582 0.15182345 0.15182345 0.23746745
14  0.23746745 0.12380782 0.12380782 0.      ]
15 err^(3) = 0.6170779999999993

```

3. Exécuter ce script pour faire des tests numériques et compléter la feuille de résultats. La valeur de la vitesse c (positive ou négative) et le temps final T doivent satisfaire $u(0, T) = u(1, T) = 0$ (c'est le cas par exemple avec $c = 2$ ou -2 et $T = 0.1$ proposés sur la feuille de résultats). La donnée initiale n'est pas de classe C^2 (ni même C^1) donc la solution exacte non plus. On n'est pas assuré d'obtenir les ordres de convergence établis pour des solutions suffisamment régulières. On pourra cependant observer que les schémas sont instables quand $|c|\Delta t > h$ (et aussi quand $c < 0$ pour le schéma décentré à gauche, ou $c > 0$ pour le schéma décentré à droite),

exacts quand $|c|\Delta t = h$ et que l'erreur diminue quand Δt et h diminuent, tout en vérifiant la condition $|c|\Delta t < h$. Compléter les tableaux de résultats avec les jeux d'essais proposés et en ajouter de nouveaux appropriés.