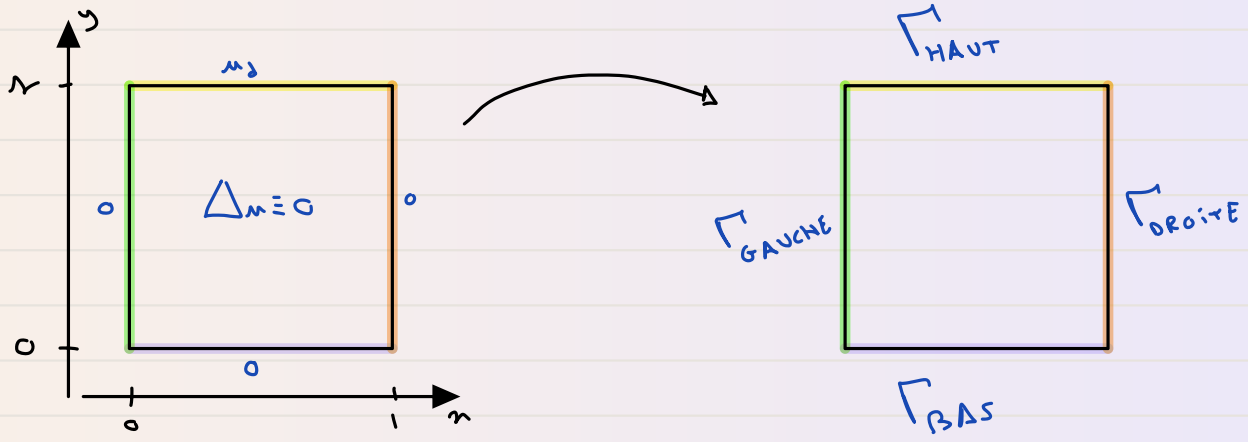
Exercice 2 (Solutions exactes et différences finies pour l'équation de Laplace 2D)
On considère une plaque carrée dont les côtés sont maintenus à des températures données : $u_d(x)$ sur le côté supérieur et 0 sur les trois autres côtés. La température $u(x, y)$ dans l'intérieur de la plaque (température d'état stationnaire) est solution du problème suivant :

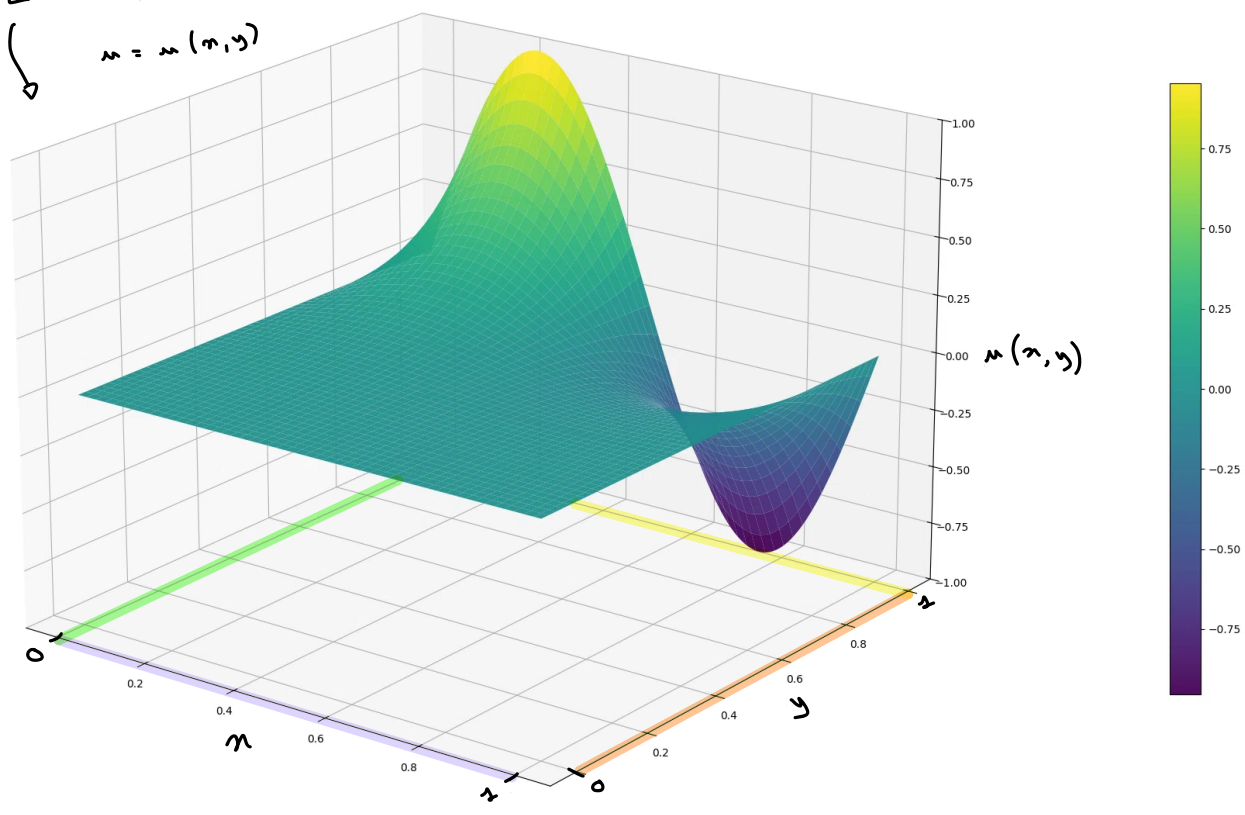
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \forall\, (x,y) \in \Omega =]0,1[^2, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0, \ \forall\, x \in [0,1], \ \forall\, y \in]0,1[, \\ u(x,1) = u_d(x), \ \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

$\Omega = (0,1) \times (0,1) = (0,1)^2$



La solution

$u = u(x,y)$



1. Recherche de solutions exactes. On souhaite déterminer des solutions, à variables séparées, de la forme $u(x,y) = v(x)w(y)$.

   (a) On suppose qu'une telle fonction vérifie $\Delta u(x,y) = 0$. Montrer qu'il existe une constante réelle K telle qu'en tout (x,y) tel que $v(x) \neq 0$ et $w(y) \neq 0$, on ait $v''(x) = -Kv(x)$ et $w''(y) = Kw(y)$. Réciproquement, vérifier que si $u(x,y) = v(x)w(y)$ avec $v(x)$ et $w(y)$ telles que $v''(x) = -Kv(x)$ pour tout x, et $w''(y) = Kw(y)$ pour tout y, où K est une constante réelle, alors $\Delta u(x,y) = 0$.

OSQ $\quad u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$

- Si $\Delta u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in (0,1)$, alors

(Notation prime autorisée car v et w ne dépendent que d'une VARIABLE)

$$0 = \Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) \quad \forall x,y \in (0,1)$$

alors $\quad v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \quad \forall x,y \in (0,1)$

alors $\quad v(x)w''(y) = -v''(x)w(y) \quad \forall x,y \in (0,1)$

(si x et y sont tels que $v(x) \neq 0$ et $w(y) \neq 0$: on peut diviser)

alors $\quad \dfrac{w''(y)}{w(y)} = -\dfrac{v''(x)}{v(x)} \quad \forall x,y \in (0,1)$ tels que $v(x) \neq 0$ et $w(y) \neq 0$

PROPOSITION : Soient $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ et $g : (0,1) \to \mathbb{R}$.

Si $\left[f(x) = g(y), \ \forall x,y \in (0,1) \right]$, ALORS $\left[\exists K \in \mathbb{R} \text{ telle que } f \equiv g \equiv K \right]$.

i.e. $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} \forall x \in (0,1), \ f(x) = K \\ \text{ET} \\ \forall y \in (0,1), \ f(y) = K. \end{cases}$

↳ **PREUVE** : Supposons $f(x) = g(y), \ \forall x,y \in (0,1) \quad (*)$

- Soit $x \in (0,1)$, pour $y = x$, $(*)$ devient $f(x) = g(x)$

  Donc $\forall x \in (0,1), \ f(x) = g(x)$. Donc $f \equiv g$.

- Prenons maintenant $x,y \in (0,1)$ quelconques.

On a : $f(x) \overset{(*)}{=} g(y)$.

Or on vient de montrer que $f \equiv g$, donc, en particulier $g(y) = f(y)$.

On a donc $f(x) \overset{(*)}{=} g(y) = f(y)$.

On a ainsi montré que $\forall x, y \in (0,1)$, $f(x) = f(y)$; autrement dit, f est une constante.

Ainsi, $\exists K \in \mathbb{R}$ tel que $f \equiv K$.

On a donc montré que $f \equiv g \equiv K$. □

On avait : $\underbrace{\frac{w''(y)}{w(y)}}_{=: g(y)} = \underbrace{-\frac{v''(x)}{v(x)}}_{=: f(x)}$ $\forall x, y \in (0,1)$ tels que $v(x) \neq 0$ et $w(y) \neq 0$

Par application directe de la proposition, il vient : $\exists K \in \mathbb{R}$ t.q. $\frac{w''}{w} \equiv K \equiv -\frac{v''}{v}$

Autrement dit, $\exists K \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x, y \in (0,1)$, $\frac{w''(y)}{w(y)} = K$ ET $\frac{v''(x)}{v(x)} = -K$.

C'est-à-dire : $\exists K \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} \forall x \in (0,1), \ v''(x) = -K v(x) \\ \text{ET} \\ \forall y \in (0,1), \ w''(y) = K w(y). \end{cases}$ CQFD

↳ <u>Réciproquement</u> : si $\exists K \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} \forall x \in (0,1), \ v''(x) = -K v(x) \\ \text{ET} \\ \forall y \in (0,1), \ w''(y) = K w(y) \end{cases}$, alors (sous l'hypothèse de fond que $u(x,y) = v(x) w(y)$)

$$\forall x, y \in (0,1), \quad \Delta u(x,y) = v''(x) w(y) + v(x) w''(y)$$

$$= -K v(x) \times w(y) + v(x) \times K w(y)$$

$$= -K v(x) w(y) + K v(x) w(y)$$

$$= 0$$

(b) Déterminer les fonctions $v(x)$ solutions de $v''(x) = -Kv(x)$ et les fonctions $w(y)$ solutions de $w''(y) = Kw(y)$, suivant que $K = 0$, $K = -c^2 < 0$ ou $K = c^2 > 0$. On considère maintenant des fonctions $u(x, y) = v(x)w(y)$ obtenues avec de telles solutions.

- Si $K = 0$: $\forall x \in (0,1),\ v''(x) = 0$ implique

  $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in (0,1),\ v'(x) = a$ implique

  $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in (0,1),\ \boxed{v(x) = ax + b.}$

  De même, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\forall y \in (0,1),\ \boxed{w(y) = \alpha y + \beta}$

- Si $K = -c^2 < 0$: On sait qu'$\exists K \in \mathbb{R}$ tq
$$\begin{cases} \forall x \in (0,1),\ v''(x) = -Kv(x) \\ \text{ET} \\ \forall y \in (0,1),\ w''(y) = Kw(y) \end{cases}$$

On vectorise pour perdre l'ordre 2 au prix d'augmenter la dimension :

Pour $x, y \in (0,1)$, posons $V(x) = \begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $W(y) = \begin{pmatrix} w(y) \\ w'(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\forall x, y \in (0,1)$,
$$\begin{cases} V'(x) = \begin{pmatrix} v'(x) \\ v''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'(x) \\ -Kv(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +c^2 & 0 \end{pmatrix}}_{A^+} \begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = A^+ V(x) \\ W'(y) = \begin{pmatrix} w'(y) \\ w''(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'(y) \\ Kw(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'(y) \\ -c^2 w(y) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A^-} \begin{pmatrix} w(y) \\ w'(y) \end{pmatrix} = A^- W(y) \end{cases}$$

Ainsi, V et W sont solution des EDO : $V' = A^+ V$ et $W' = A^- W$ dans $\mathbb{R}^2$.

La théorie des EDO linéaires nous dit que :

$\forall x,y \in (0,1)$, $V(x) = e^{xA^{\pm}} V(0)$ et $W(y) = e^{yA^{-}} W(0)$

(VECTEUR, MATRICE, VECTEUR ; VECTEUR, MATRICE, VECTEUR)

avec, pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $e^{M} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$

$= I_d + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{6} M^3 + \frac{1}{24} M^4 + \dots\dots$

Ici, en calculant les puissances successives de $A^{\pm}$, on trouve

$(A^{\pm})^0 = I_d \quad (n=0)$

$(A^{\pm})^1 = A^{\pm} \quad (n=1)$

$(A^{\pm})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm c^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm c^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm c^2 & 0 \\ 0 & \pm c^2 \end{pmatrix} = \pm c^2 I_d \quad (n=2)$

$(A^{\pm})^3 = (A^{\pm})^2 (A^{\pm}) = \pm c^2 I_d \cdot A^{\pm} = \pm c^2 A^{\pm} \quad (n=3)$

$(A^{\pm})^4 = (A^{\pm})^3 (A^{\pm}) = \pm c^2 A^{\pm} \cdot A^{\pm} = \pm c^2 (A^{\pm})^2 = (\pm c^2) \times (\pm c^2 I_d) = c^4 I_d \quad (n=4)$

$(A^{\pm})^5 = (A^{\pm})^4 (A^{\pm}) = \pm c^4 I_d \cdot A = \pm c^4 A \quad (n=5)$

↳ Par récurrence : Pour $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $(A^{\pm})^{2k} = (\pm c^2)^k I_d$

Pour $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $(A^{\pm})^{2k+1} = (\pm c^2)^k A^{\pm}$

On a donc $e^{yA^-} = I_d + yA^- + \frac{y^2}{2}(A^-)^2 + \frac{y^3}{6}(A^-)^3 + \dots\dots$

$= \sum_{n \text{ PAIR}} + \sum_{n \text{ IMPAIR}}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} (A^-)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} (A^-)^{2k+1}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} (-c^2)^k I_d + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} (-c^2)^k A^- \quad (*)$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (cky)^{2k}}{(2k)!}\right] Id + \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^{2k+1-1}\, y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] A^-$$

$$= \cos(cy)\, Id + \frac{1}{c}\left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(cy)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] A^-$$

$$= \cos(cy)\, Id + \frac{1}{c}\sin(cy)\, A^- \qquad \text{or } A^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(cy) & 0 \\ 0 & \cos(cy) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}\sin(cy) \\ -c\sin(cy) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(cy) & \frac{1}{c}\sin(cy) \\ -c\sin(cy) & \cos(cy) \end{pmatrix} = e^{yA^-}$$

De même, en reprenant les étapes importantes,

$$e^{xA^+} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (+c^2)^k Id + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (+c^2)^k A^+$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^{2k}}{(2k)!}\right] Id + \frac{1}{c}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] A^+$$

$$= \begin{pmatrix} ch(cx) & \frac{1}{c}sh(cx) \\ csh(cx) & ch(cx) \end{pmatrix} = e^{xA^+}$$

Ainsi, $\forall x, y \in (0,1)$, $W(y) = e^{yA^-} V(0) = \begin{pmatrix} \cos(cy) & \frac{1}{c}\sin(cy) \\ -c\sin(cy) & \cos(cy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(y) \\ v'(y) \end{pmatrix}$

$$V(x) = e^{xA^-} W(0) \begin{pmatrix} ch(cx) & \frac{1}{c}sh(cx) \\ csh(cx) & ch(cx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(0) \\ w'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$$

Donc $\forall x, y \in (0,1)$, $v(x) = v(0)\, ch(cx) + \frac{v'(0)}{c} sh(cx)$

$$w(y) = w(0)\cos(cy) + \frac{w'(0)}{c}\sin(cy)$$

Ainsi, $\exists\, a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tq $\forall x,y \in (0,1)$,
$$\begin{cases} v(x) = a\,\mathrm{ch}(cx) + b\,\mathrm{sh}(cx) \\ w(y) = \alpha\cos(cy) + \beta\sin(cy) \end{cases}$$

- <u>Si $k = c^2 > 0$:</u> On a $\begin{cases} v'' = -kv = -c^2 v \\ w'' = kw = +c^2 w \end{cases}$ et dans le cas précédent, $(k = -c^2 < 0)$

on a résolu $\begin{cases} v'' = -kv = +c^2 v \\ w'' = kw = -c^2 w. \end{cases}$

↳ On voit qu'il suffit d'échanger les lettres $v \leftrightarrow w$ pour obtenir la solution :

Ainsi, $\exists\, a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tq $\forall x,y \in (0,1)$,
$$\begin{cases} v(x) = a\cos(cx) + b\sin(cx) \\ w(y) = \alpha\,\mathrm{ch}(cy) + \beta\,\mathrm{sh}(cy) \end{cases}$$

- <u>CONCLUSION :</u> $\exists\, a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tq $\forall x,y \in (0,1)$,

ALORS \ Si	$k = 0$	$k = +c^2 > 0$	$k = -c^2 < 0$
$v(x) = \dots$	$ax + b$	$a\cos(cx) + b\sin(cx)$	$a\,\mathrm{ch}(cx) + b\,\mathrm{sh}(cx)$
$w(y) = \dots$	$\alpha x + \beta$	$\alpha\,\mathrm{ch}(cx) + \beta\,\mathrm{sh}(cx)$	$\alpha\cos(cx) + \beta\sin(cx)$

CQFD

(c) Supposons $K \leq 0$. Vérifier que si $u(x,y)$ vérifie les conditions aux limites du problème, alors u est nécessairement nulle, et solution du problème seulement si u_d est nulle.

Supposons, par l'absurde, que $u \not\equiv 0$.

Alors l'affirmation $[u \equiv 0] \overset{\text{DÉF}}{\Leftrightarrow} [\forall x,y \in (0,1),\ u(x,y) = 0]$ est FAUSSE.

Donc NON$[\forall x,y \in (0,1),\ u(x,y) = 0]$ est VRAIE

Donc $[\exists x_0, y_0 \in (0,1)$ tq $u(x_0,y_0) \neq 0]$ est VRAIE.

or $u(x,y) = v(x)w(y)$ par hypothèse

Donc $\exists x_0, y_0 \in (0,1)$ tq $v(x_0) \neq 0$ ET $w(y_0) \neq 0$

Sur le bord $\Gamma_{\text{GAUCHE}} = \{x=0\} \times \{y \in (0,1)\}$, u doit vérifier la condition de bord $u(x,y) = 0$.

Plus précisément, $\forall y \in (0,1)$, $u(0,y) = v(0) \cdot w(y) = 0$.

En particulier, pour $y = y_0$, on trouve $v(0) \times \underbrace{w(y_0)}_{\neq 0} = 0$, et donc $\boxed{v(0) = 0}$.

↳ En faisant pareil pour le bord de droite Γ_{DROITE}, on trouve $\boxed{v(1) = 0}$.

- Si $\underline{K = 0}$, alors on a $\forall x \in (0,1)$, $v(x) = ax + b$.

  On a donc $\begin{cases} 0 = v(0) = b \\ 0 = v(1) = a + b \end{cases} \Leftrightarrow [a = b = 0] \Leftrightarrow [v \equiv 0]$

  $\Rightarrow [u \equiv 0]$

  ⚠ ABSURDE.

- Si $\underline{K = -c^2 < 0}$, alors on a $\forall x \in (0,1)$, $v(x) = a\,\mathrm{ch}(cx) + b\,\mathrm{sh}(cx)$

  On a donc $\begin{cases} 0 = v(0) = a \\ 0 = v(1) = a\,\mathrm{ch}(c) + b\,\mathrm{sh}(c) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b\,\underbrace{\mathrm{sh}(c)}_{\neq 0 \text{ car } c \neq 0} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [a = b = 0] \Leftrightarrow [r \equiv 0]$$

$$\Rightarrow [u \equiv 0]$$

⚠ ABSURDE.

↳ On peut maintenant vérifier que la fonction $u \equiv 0$ est bien solution du problème :

Si $u \equiv 0$ sur $[0,1]\times[0,1]$, alors

↳ $u_x \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_y \equiv 0$, $u_{yy} \equiv 0$ donc $\Delta u \equiv 0$ sur $(0,1)\times(0,1)$, (OK POUR L'INTÉRIEUR)

↳ $u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0$ (OK POUR GAUCHE, DROITE, BAS)

↳ $u(x,1) = 0 = u_d(x)$ (OK POUR HAUT ssi $u_d \equiv 0$)

CONCLUSION : Si $K \leqslant 0$, alors

↳ Si $u_d \not\equiv 0$, alors pas de solution.

↳ Si $u_d \equiv 0$, alors la seule solution est la solution triviale $u \equiv 0$.

CQFD

(d) Supposons $K > 0$ et $K = c^2$. Montrer que si $c = k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient des solutions non nulles qu'on déterminera, dans le cas où $u_d(x) = \sin(k\pi x)\sinh(k\pi)$.

En faisant comme pour la question précédente, en supposant que $w \not\equiv 0$, on a $v(0) = v(1) = 0$.

Si $\underline{K = c^2 > 0}$, alors on a $\forall x \in (0,1)$, $v(x) = a\cos(cx) + b\sin(cx)$

On a donc $\begin{cases} 0 = v(0) = a \\ 0 = v(1) = a\cos(c) + b\sin(c) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b\sin(c) = 0 \end{cases}$

↳ Si $c \neq k\pi$, alors $\sin(c) \neq 0$ et alors $a = b = 0$,
et alors $v \equiv 0$, c'est ABSURDE.

↳ S'$\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $c = k\pi$, alors $a = 0$ mais b n'est pas fixé à ce stade.

On a donc $v(x) = b\sin(cx)$

Par ailleurs, on a également $w(y) = \alpha\,ch(cy) + \beta\,sh(cy)$

Pour la condition au bord bas, en $y = 0$, on a :

$\forall x \in (0,1)$, $\quad 0 = u(x,0) = v(x)\,w(0) = b\sin(cx)\left[\alpha + 0\right] = \alpha\, b\sin(cx)$

En particulier, pour presque tout n, $\sin(cn) \neq 0$.

On a donc pour au moins un certain $\hat{n} \in (0,1)$, $\alpha b \underbrace{\sin(c\hat{n})}_{\neq 0} = 0$.

Donc $\alpha b = 0$. Or $v \not\equiv 0$ donc $b \neq 0$ donc $\alpha = 0$.

Ainsi, $w(y) = \beta \sinh(cy)$

↳ Sur le bord haut, en $y=1$, on a $u_y(x) = u(x,1) = v(x) w(1)$

$= b \sin(cx) \beta \sinh(c)$

Donc, nécessairement, $b\beta = 1$

$= b\beta \sinh(k\pi) \sin(k\pi x)$

$= \sinh(k\pi) \sin(k\pi x)$ ↑ demandé dans l'énoncé...

Ainsi, on trouve la solution non-triviale :

$\forall x,y \in (0,1)$, $u(x,y) = v(x) w(y) = b \sin(cx) \times \beta \sinh(cy)$

$= \underbrace{b\beta}_{=1} \sin(cx) \sinh(cy)$

$$\boxed{u(x,y) = \sin(cx) \sinh(cy)}$$

CQFD

↳ Remarque : dans le cas où $u_y \in L^2_x(0,1)$ en général, on décompose u_y en série de Fourier sinus :

$$u_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_y(k) \sin(k\pi x) \quad \text{dans } L^2(0,1)$$

Alors, pour chaque mode $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve la solution $u^{(k)}(x,y)$ associée à la condition de bord $u_y^{(k)}(x) = \sin(k\pi x)$, puis on reconstitue u en posant

$$u(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_y(k)\, u^{(k)}(x,y).$$

2. Approximation par différences finies. Le carré Ω est maillé avec un pas uniforme $h = 1/(N+1)$ dans les deux directions :

$$\begin{cases} x_i = ih, \ i = 0, \ldots, N+1 \text{ dans la direction } x, \\ y_j = jh, \ j = 0, \ldots, N+1 \text{ dans la direction } y. \end{cases}$$

On cherche les valeurs $u_k = u_h(M_k) \simeq u(M_k)$ aux points M_k du maillage, situés à l'intérieur de Ω, numérotés de 1 à N^2, comme dans la figure suivante (exemple avec $N = 3$) :

7	8	9	
4	5	6	
1	2	3	

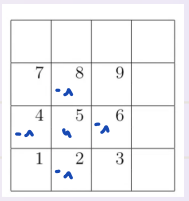
En suivant la méthode des différences finies, on approche Δu en un point M :

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M) \\ &\simeq \frac{1}{h^2}(u(E) - 2\,u(M) + u(O)) + \frac{1}{h^2}(u(N) - 2\,u(M) + u(S)) \\ &\simeq \frac{1}{h^2}(u(E) + u(O) + u(N) + u(S) - 4\,u(M)) \end{aligned}$$

où M point intérieur du maillage et E,O,N,S points voisins :

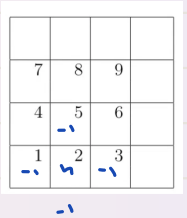
	N		
O	M	E	
	S		

En écrivant que $\Delta u(M_k) = 0$ aux points intérieurs à Ω, $k = 1, ..., N^2$, avec l'approximation proposée ci-dessus de Δu, on obtient un système linéaire $Au = b$, de dimension N^2, d'inconnue $u = (u_1, ..., u_{N^2})^T$, dont la matrice est symétrique et constituée de blocs carrés de dimension N. Déterminer ce système linéaire pour $N = 3$.



↳ **Maille $k=5$** (la plus facile)

$$\Delta u(M_5) = u_{xx}(M_5) + u_{yy}(M_5) \approx \frac{1}{h^2}\left(-u_2 - u_4 - u_6 - u_8 + 4u_5\right) = 0$$



↳ **Maille $k=2$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_1 - u_5 - u_3 - 0 + 4u_2\right) = 0$

↳ **Maille $k=6$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_3 - u_5 - u_9 - 0 + 4u_6\right) = 0$

↳ **Maille $k=4$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_1 - u_5 - u_7 - 0 + 4u_4\right) = 0$

↳ **Maille $k=1$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_4 - u_2 - 0 - 0 + 4u_1\right) = 0$

↳ **Maille $k=3$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_6 - u_2 - 0 - 0 + 4u_3\right) = 0$

↳ **Maille $k=7$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_4 - u_8 - 0 - u_d(x_1) + 4u_7\right) = 0 \iff \frac{1}{h^2}\left(-u_4 - u_8 + 4u_7\right) = u_d(x_1)$

↳ **Maille $k=8$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_7 - u_9 - u_5 - u_d(x_2) + 4u_8\right) = 0 \iff \frac{1}{h^2}\left(-u_7 - u_9 - u_5 + 4u_8\right) = u_d(x_2)$

↳ **Maille $k=9$** : $\frac{1}{h^2}\left(-u_8 - u_6 - 0 - u_d(x_3) + 4u_9\right) = 0 \iff \frac{1}{h^2}\left(-u_6 - u_8 + 4u_9\right) = u_d(x_3)$

Le schéma pour $N=3$ est donc $A_h U_h = b_h$, avec

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad b = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline u_d(x_1) \\ u_d(x_2) \\ u_d(x_3) \end{array}\right)$$