

Analyse numérique – 2026-2027 – TD Liste 2

Equation parabolique de la chaleur (énoncés et indications)

Dans tous les exercices de la liste, on considère l'équation parabolique de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t \in]0, T[\quad (1)$$

$$u(0, t) = u_g, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2)$$

$$u(1, t) = u_d, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0, 1] \quad (4)$$

Exercice 1 (Recherche de solutions exactes)

On suppose $u_g = u_d = 0$. On souhaite déterminer des solutions, à variables séparées, de la forme $u(x, t) = v(x)w(t)$.

- On suppose qu'une telle fonction vérifie l'équation (1). Montrer qu'il existe une constante réelle K telle qu'en tout (x, t) tel que $v(x) \neq 0$ et $w(t) \neq 0$, on ait $v''(x) = Kv(x)$ et $w'(t) = Kw(t)$. Réciproquement, vérifier que si $u(x, t) = v(x)w(t)$ avec $v(x)$ et $w(t)$ telles que $v''(x) = Kv(x)$ pour tout x , et $w'(t) = Kw(t)$ pour tout t , où K est une constante réelle, alors $u(x, t)$ vérifie (1).

1) Supposons que $u(t, x) = w(t) \cdot v(x)$ soit une solution de (1).

$$\text{Alors } 0 = u_t - u_{xx} = w'v + wv'',$$

donc pour tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$ tel que $w(t) \neq 0$ et $v(x) \neq 0$, on a,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} \equiv K \in \mathbb{R}$$

ne dépend que de t ne dépend que de x

donc sont constants
 par rapport à t et par rapport à x.
 (cf. TD 1, Ex 2, on avait $\frac{w''(t)}{w(t)} = -\frac{v''(x)}{v(x)}$)

$$\text{Donc } w' = Kw \text{ et } v'' = Kv, \text{ c.q.f.d.}$$

La Réciproquement, si $u(t, x) = w(t) \cdot v(x)$, avec $w' = Kw$ et $v'' = Kv$, alors,

$$u_t - u_{xx} = w'v - wv'' = Kwv - wKv = Kwv - Kwv = 0, \text{ c.q.f.d.}$$

2. Déterminer les fonctions $v(x)$ solutions de $v''(x) = Kv(x)$ et les fonctions $w(t)$ solutions de $w'(t) = Kw(t)$, suivant que $K = 0$, $K = -c^2 < 0$ ou $K = c^2 > 0$. On considère maintenant des fonctions $u(x, t) = v(x)w(t)$ obtenues avec de telles solutions.

↳ Pour w : $w'(t) = Kw(t)$

↳ EDO linéaire d'ordre 1, autonome.

↳ Si $K = 0$ alors $w = \alpha$ (une constante)

↳ Si $K \neq 0$ alors $w(t) = \alpha e^{Kt}$ (où $\alpha := w(t=0)$)

↳ Pour v : $v''(x) = Kv(x)$

↳ EDO linéaire d'ordre 2, autonome.

↳ Si $K = 0$, alors $v(x) = ax + b$

↳ Si $K = c^2 > 0$, alors $v(x) = a \cosh(cx) + b \sinh(cx)$

↳ Si $K = -c^2 < 0$, alors $v(x) = a \cos(cx) + b \sin(cx)$

} cf. la
fich. TD 1

Conclusion :

Si... Alors...	$K = 0$	$K = c^2 > 0$	$K = -c^2 < 0$
$w(t)$	α	$\alpha e^{c^2 t}$	$\alpha e^{-c^2 t}$
$v(x)$	$ax + b$	$a \cosh(cx) + b \sinh(cx)$	$a \cos(cx) + b \sin(cx)$

3. Supposons $K \geq 0$. Vérifier que si $u(x, t)$ vérifie les conditions aux limites (2) et (3), alors u est nécessairement nulle, et solution du problème seulement si la solution initiale u_0 est nulle.

On cherche des solutions non-triviales, i.e. $u \neq 0$.

↳ Si $K=0$, alors $u(t, x) = \alpha(x + b)$

On a au bord $x=0$: $0 = u(t, 0) = \alpha\beta$.

Sur $\alpha=0 \Rightarrow u \equiv 0$ donc nécessairement, $\beta=0$.

On a donc $u(t, x) = \alpha x$.

Maintenant, au bord droit $x=L$, on a

$$0 = u(t, L) = \alpha L.$$

Donc, ou bien $\alpha=0$ et dans ce cas $u \equiv 0$, ou bien $L=0$, et dans ce cas, $u \equiv 0$ aussi.

↳ CONCLUSION: Pas de solution non-triviale pour $K=0$.

↳ Si $K = +c^2 > 0$, alors $u(t, x) = \alpha e^{\frac{c^2}{2}t} (a \cosh(cx) + b \sinh(cx))$.

↳ En $x=0$, on a $0 = u(t, 0) = \alpha e^{\frac{c^2}{2}t} (a \times 1 + b \times 0) = \alpha a e^{\frac{c^2}{2}t}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{↳ } e^{\frac{c^2}{2}t} > 0, \\ \text{↳ } \alpha \text{ ne peut pas être nul, autrement, on aurait } u \equiv 0 \end{array} \right\} \text{ donc } a=0.$$

↳ On a donc, avec $a=0$, $u(t, x) = \alpha b e^{\frac{c^2}{2}t} \sinh(cx)$.

↳ En $x=L$, on a: $0 = u(t, L) = \alpha b e^{\frac{c^2}{2}t} \sinh(cL)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{↳ } e^{\frac{c^2}{2}t} > 0, \\ \text{↳ } \alpha \text{ ne peut pas être nul, autrement, on aurait } u \equiv 0 \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow sh(c) \neq 0$
 $\hookrightarrow$ Donc $b=0$ et donc $u \equiv 0$.

$\hookrightarrow$ CONCLUSION: Pas de solution non-triviale pour $K = +c^2 > 0$.

4. Supposons $K < 0$ et $K = -c^2$. Montrer que si $c = k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient une solution non nulle de la forme $u(x, t) = b_k \sin(k\pi x) \exp(-k^2\pi^2 t)$ pour la solution initiale $u_0(x) = b_k \sin(k\pi x)$, où b_k est une constante réelle. En déduire la solution exacte pour la solution initiale $u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{4} \sin(10\pi x)$.

$\hookrightarrow$ Si $K = -c^2 < 0$, alors $u(t, x) = e^{-\frac{c^2}{4}t} (a \cos(cx) + b \sin(cx))$

$\hookrightarrow$ En $x=0$, $0 = u(t, 0) = e^{-\frac{c^2}{4}t} (a \times 1 + b \times 0) = a e^{-\frac{c^2}{4}t}$

$\left. \begin{array}{l} \hookrightarrow e^{-\frac{c^2}{4}t} > 0, \\ \hookrightarrow a \text{ ne peut pas \u00eatre nul, autrement, on aurait } u \equiv 0 \end{array} \right\} \text{ donc } a=0.$

$\hookrightarrow$ On a donc, avec $a=0$, $u(t, x) = b e^{-\frac{c^2}{4}t} \sin(cx)$.

$\hookrightarrow$ En $x=1$, on a : $0 = u(t, 1) = b e^{-\frac{c^2}{4}t} \sin(c)$

$\left\{ \begin{array}{l} \hookrightarrow e^{-\frac{c^2}{4}t} > 0, \\ \hookrightarrow b \text{ ne peut pas \u00eatre nul, autrement, on aurait } u \equiv 0 \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ Donc ou bien $b=0$, mais alors $u \equiv 0$ (ce qu'on ne souhaite pas),

ou bien $\sin(c) = 0$ (ce qui est possible si c est bien choisi)

$\hookrightarrow$ Si $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $c = k\pi$, alors $u(t, x) = 0$, et la fonction

$u(t, x) = v(t) \cdot v(x) = b e^{-\frac{c^2}{4}t} \sin(\pi x)$ vérifie.

$\left. \begin{array}{l} \hookrightarrow u_t - u_{xx} = 0 \quad \forall t > 0, \forall x \in (0, 1) \\ \hookrightarrow u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \forall t > 0 \end{array} \right\} \text{ on til } u \text{ est donc solution}$
 du problème de Cauchy (1)-(2)-(3)-(4)
 en posant $u|_{t=0}(x) = u_0(x) = b \sin(\pi x)$

Noter que a et b sont arbitraires ici ; on peut donc réunir les deux constantes en une seule.

Il vient $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u(t, n) = b e^{-k^2 \pi^2 t} \sin(k\pi n)$ est une solution du problème de Cauchy (1)-(2)-(3)-(4).

↳ Maintenant, on se demande : quelle est la solution émanant de $u_0(n) = \sin(\pi n) + \frac{1}{4} \sin(10\pi n)$?

↳ On sait que $u_0^{(1)}(n) = \sin(\pi n)$ engendre $u(t, n) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi n)$.

↳ On sait que $u_0^{(2)}(n) = \frac{1}{4} \sin(10\pi n)$ engendre $u(t, n) = \frac{1}{4} e^{-100\pi^2 t} \sin(10\pi n)$.

Le problème est linéaire, donc on peut superposer les solutions :

$$u_0(n) = \sin(\pi n) + \frac{1}{4} \sin(10\pi n) \text{ engendre } u(t, n) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi n) + \frac{1}{4} e^{-100\pi^2 t} \sin(10\pi n)$$

↳ Allez voir cette vidéo :

<https://youtu.be/TolXSwZ1pJU?si=bWE3rzsIVUbZxCkX>

