

Exercice 2 (Consistance et convergence du schéma explicite)

On considère un maillage espace-temps de $[0, 1] \times [0, T]$, de pas $h = \frac{1}{N+1}$ en espace avec les points discrets $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$, et de pas $\Delta t = \frac{T}{M+1}$ en temps avec les instants discrets $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, M+1$.

Pour $j = 0, \dots, M+1$, on note $U^{(j)}$ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ des valeurs $u_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, N$ qu'on souhaite déterminer, pour approcher les valeurs de la solution exacte $u(x_i, t_j)$, par le schéma explicite :

$$U^{(j+1)} = U^{(j)} - \Delta t A_h U^{(j)} + \Delta t C^{(j)}, \quad j = 0, \dots, M \quad (5)$$

où A_h et $C^{(j)}$ désignent la matrice carrée de dimension N et le vecteur de longueur N suivants :

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^{(j)} = \begin{pmatrix} f(x_1, t_j) + \frac{u_g}{h^2} \\ f(x_2, t_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, t_j) \\ f(x_N, t_j) + \frac{u_d}{h^2} \end{pmatrix}$$

On note $\pi_h u(t)$ la projection de la solution exacte u à l'instant t sur les points intérieurs x_i du maillage de $[0, 1]$:

$$\pi_h u(t) = \begin{pmatrix} u(x_1, t) \\ \vdots \\ u(x_N, t) \end{pmatrix}$$

et $\varepsilon_h(u)^{(j)}$ l'erreur de consistance à l'itération j :

$$\varepsilon_h(u)^{(j)} = \frac{\pi_h u(t_{j+1}) - \pi_h u(t_j)}{\Delta t} + A_h \pi_h u(t_j) - C^{(j)}$$

On suppose que les valeurs u_g et u_d sont compatibles avec la fonction $u_0(x)$, c'est-à-dire que $u_0(0) = u_g$ et $u_0(1) = u_d$, et que les données $f(x, t)$ et $u_0(x)$ sont telles que le problème admette une et une seule solution exacte $u(x, t)$ sur $[0, 1] \times [0, T]$, et que cette solution $u(x, t)$ soit de classe C^4 relativement à x et de classe C^2 relativement à t .

1. Montrer que le schéma est consistant en norme $\|\cdot\|_\infty$, d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps :

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|\varepsilon_h(u)^{(j)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \sup_{[0,1] \times [0,T]} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \frac{\Delta t}{2} \sup_{[0,1] \times [0,T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|$$

On regarde toujours

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & t \in (0, T), \quad x \in (0, 1), \quad (1) \\ u(t, 0) = u_g(t) & t \in (0, T), \quad (2) \\ u(t, 1) = u_d(t) & t \in (0, T), \quad (3) \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x) & x \in (0, 1) \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\mathbb{R}^N \ni \varepsilon_h(u)^j = \frac{\pi_h u(t_{j+1}) - \pi_h u(t_j)}{\tau} - A_h \pi_h u(t_j) - c^j$$

Par Taylor-Lagrange, on a $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0; M \rrbracket$,

$$\underbrace{u(t_{j+1}, n_i)}_{=(\pi_h u(t_{j+1}))_i} = u(t_j + h, n_i) = \underbrace{u(t_j, n_i)}_{(\pi_h u(t_j))_i} + \tau u_t(t_j, n_i) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(\theta_j, n_i)$$

$$\text{donc } u_t(t_j, n_i) = \frac{(\pi_h u(t_{j+1}))_i - (\pi_h u(t_j))_i}{\tau} - \frac{\tau}{2} u_{tt}(\theta_j, n_i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\pi_h u(t_{j+1}))_i - (\pi_h u(t_j))_i}{\tau} = u_t(t_j, n_i) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(\theta_j, n_i)$$

De même, $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0; M+1 \rrbracket$,

$$u(t_j, n_{i+1}) = u(t_j, n_i) + h u_x(t_j, n_i) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_j, n_i) + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_j, n_i) + \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(t_j, \xi_i)$$

$$u(t_j, n_{i-1}) = u(t_j, n_i) - h u_x(t_j, n_i) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_j, n_i) - \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_j, n_i) + \frac{h^4}{24} u_{xxxx}(t_j, \zeta_i)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } u_{xx}(t_j, n_i) &= \frac{1}{h^2} \left[u(t_j, n_{i-1}) - 2u(t_j, n_i) + u(t_j, n_{i+1}) \right] - \frac{h^2}{24} \left[u_{xxxx}(t_j, \xi_i) + u_{xxxx}(t_j, \zeta_i) \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[(\pi_h u(t_j))_{i-1} - 2(\pi_h u(t_j))_i + (\pi_h u(t_j))_{i+1} \right] - \frac{h^2}{24} \left[u_{xxxx}(t_j, \xi_i) + u_{xxxx}(t_j, \zeta_i) \right] \\ &= \underbrace{[A_h \pi_h u(t_j)]_i}_{= [A_h \pi_h u(t_j)]_i} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } [A_h \pi_h u(t_j)]_i = u_{xx}(t_j, n_i) + \frac{h^2}{24} \left[u_{xxxx}(t_j, \xi_i) + u_{xxxx}(t_j, \zeta_i) \right]$$

$$\text{Ainsi: } (\varepsilon_h(u))^j_i = \underbrace{u_t(t_j, n_i) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(\theta_j, n_i)}_{\text{}} - \underbrace{\left[u_{xx}(t_j, n_i) + \frac{h^2}{24} \left[u_{xxxx}(t_j, \xi_i) + u_{xxxx}(t_j, \zeta_i) \right] \right]}_{\text{}} - \underbrace{f(t_j, n_i)}_{\text{}} \quad (*)$$

Or, $p \wedge R(u), u_t - u_{xx} - f = 0$ sur $(0, T) \times (0, 1)$; on a donc

$$(\varepsilon_h(u))^j_i = \frac{\tau}{2} u_{tt}(\theta_j, n_i) - \frac{h^2}{24} \left[u_{xxxx}(t_j, \xi_i) + u_{xxxx}(t_j, \zeta_i) \right]$$

↳ On majore :

$$\begin{aligned} |(\varepsilon_h(u))_i^j| &\leq \frac{\tau}{2} |\mu_H(\theta_j, \gamma_i)| + \frac{h^2}{2\tau} [|\mu_{xxxx}(t_j, \gamma_i)| + |\mu_{xxxx}(t_j, \gamma_i)|] \\ &\leq \frac{\tau}{2} \|\mu_H\|_{L_{t,\tau}^\infty((0,\tau) \times (0,1))} + \frac{h^2}{12} \|\mu_{xxxx}\|_{L_{t,\tau}^\infty((0,\tau) \times (0,1))} \end{aligned}$$

• Point d'attention pour $i=1$ et $i=N$: dans ce cas, μ_0 et μ_N sont identifiées à $\mu_j(t_j)$ et $\mu_j(t_j)$, respectivement, et disparaissent dans (*).

↳ Ainsi, on a, $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, M \rrbracket$,

$$|(\varepsilon_h(u))_i^j| \leq \underbrace{\frac{\tau}{2} \|\mu_H\|_{L^\infty} + \frac{h^2}{12} \|\mu_{xxxx}\|_{L^\infty}}_{\text{indépendant de } i \text{ et de } j}$$

↳ On passe au max sur i et j :

$$\max_{j \in \llbracket 0, M \rrbracket} \left\| (\varepsilon_h(u))_i^j \right\|_\infty \leq \frac{\tau}{2} \|\mu_H\|_{L^\infty} + \frac{h^2}{12} \|\mu_{xxxx}\|_{L^\infty}$$

CQFD

2. Pour étudier la convergence du schéma, on considère l'erreur $e^{(j)}$ à l'instant t_j :

$$e^{(j)} = U^{(j)} - \pi_h u(t_j)$$

(a) Montrer que pour $i = 1, \dots, N$:

$$e_i^{(j+1)} = (1 - 2r)e_i^{(j)} + r e_{i-1}^{(j)} + r e_{i+1}^{(j)} - \Delta t (\varepsilon_h(u))_i^{(j)}$$

avec $r = \frac{\Delta t}{h^2}$, et en posant $e_0^{(j)} = e_{(N+1)}^{(j)} = 0$.

2) On a, d'une part: $U^{j+1} = U^j + \tau A_h U^j + \tau C^j$

d'autre part: $(\varepsilon_h(u))^j = \frac{\pi_h u(t_{j+1}) - \pi_h u(t_j)}{\tau} + A_h \pi_h u(t_j) - C^j$



$$\pi_h u(t_{j+1}) = \pi_h u(t_j) - \tau A_h \pi_h u(t_j) + \tau C^j + \tau (\varepsilon_h(u))^j$$

Donc

$e^j \stackrel{\text{d\'ef}}{=} U^j - \pi_h u(t_j)$ vérifie

$$\begin{aligned} e^{j+1} &= U^{j+1} - \pi_h u(t_{j+1}) = \underbrace{U^j + \tau A_h U^j + \tau C^j}_{\text{wavy}} - \underbrace{\pi_h u(t_j) + \tau A_h \pi_h u(t_j) - \tau C^j}_{\text{wavy}} - \tau (\varepsilon_h(u))^j \\ &= \underbrace{e^j}_{\text{wavy}} + \tau A_h e^j - \tau (\varepsilon_h(u))^j \end{aligned}$$

↳ En posant naturellement $e^0 = e^0_{\text{ini}} = 0$ (pas d'erreur sur les bords puisque valeur connue, imposée par Dirichlet)

↳ On développe A_h :

$$\begin{aligned} e^{j+1} &= \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) e^j + \frac{\tau}{h^2} e^j_{i-1} + \frac{\tau}{h^2} e^j_{i+1} - \tau (\varepsilon_h(u))^j \\ &= \left(1 - 2\tau\right) e^j + \tau e^j_{i-1} + \tau e^j_{i+1} - \tau (\varepsilon_h(u))^j \end{aligned}$$

CQFD

(b) Montrer que sous la condition : (CFL)

$$\tau = \frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

le schéma est convergent en norme $\|\cdot\|_\infty$, d'ordre 2 en espace et 1 en temps, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C(u, T)$ qu'on précisera telle que :

$$\max_{0 \leq j \leq M+1} \|e^{(j)}\|_\infty \leq C(u, T) (h^2 + \Delta t)$$

Supposons que $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$.

Alors $0 < 2\tau \leq 1$

$$-1 \leq -2\tau < 0$$

$$0 \leq 1 - 2\tau < 1$$

Θ_n a donc $0 \leq \tau, \tau, 1 - 2\tau \leq 1$ et $\tau + \tau + 1 - 2\tau = 1$.

Pan conséquent, $(1 - 2\tau)e_i^\delta + \tau e_{i-1}^\delta + \tau e_{i+1}^\delta$ forme une combinaison linéaire CONVEXE* de e_i^δ , e_{i-1}^δ et e_{i+1}^δ .

Θ_n a ainsi,

$$\begin{aligned} |e_i^{\delta n}| &\leq |1 - 2\tau| \cdot |e_i^\delta| + |\tau| \cdot |e_{i-1}^\delta| + |\tau| \cdot |e_{i+1}^\delta| + \tau |(\varepsilon_h(u))^\delta| \\ &= \underbrace{(1 - 2\tau)}_{\leq \|e^\delta\|_\infty} \cdot |e_i^\delta| + \underbrace{\tau}_{\leq \|e^\delta\|_\infty} \cdot |e_{i-1}^\delta| + \underbrace{\tau}_{\leq \|e^\delta\|_\infty} \cdot |e_{i+1}^\delta| + \underbrace{\tau}_{\leq \|\varepsilon_h(u)^\delta\|_\infty} |(\varepsilon_h(u))^\delta| \\ &\leq \underbrace{[1 - 2\tau + \tau + \tau]}_{=1 (*)} \|e^\delta\|_\infty + \tau \underbrace{\|(\varepsilon_h(u))^\delta\|_\infty}_{\leq \max_{j \in [0, M]} \|\varepsilon_h(u)^\delta\|_\infty \leq Ch^2 + O\tau} \\ &\stackrel{\uparrow}{\leq} \|e^\delta\|_\infty + \tau (Ch^2 + O\tau) \end{aligned}$$

cf. la question 1.

indépendant de i , donc en passant au max sur les i :

$$\|e_i^{j+1}\|_\infty \leq \|e_i^j\|_\infty + \tau(ch^2 + D\tau)$$

↳ Par une récurrence immédiate:

$$\begin{aligned} \|e_i^j\|_\infty &\leq \|e_i^{j-1}\|_\infty + \tau(ch^2 + D\tau) \\ &\leq \|e_i^{j-2}\|_\infty + \tau(ch^2 + D\tau) + \tau(ch^2 + D\tau) = \|e_i^{j-2}\|_\infty + 2\tau(ch^2 + D\tau) \\ &\leq \|e_i^{j-3}\|_\infty + \tau(ch^2 + D\tau) + 2\tau(ch^2 + D\tau) = \|e_i^{j-3}\|_\infty + 3\tau(ch^2 + D\tau) \\ &\leq \|e_i^{j-4}\|_\infty + \tau(ch^2 + D\tau) + 3\tau(ch^2 + D\tau) = \|e_i^{j-4}\|_\infty + 4\tau(ch^2 + D\tau) \end{aligned}$$

etc. jusqu'à:

$$\begin{aligned} &\leq \|e_i^{j-j}\|_\infty + j\tau(ch^2 + D\tau) \\ &= \|e_i^0\|_\infty \quad j\tau \leq (M+1)\tau = (M+1)\frac{\tau}{M+1} = \tau \\ &= 0 \quad (\text{on est exact sur la donnée initiale}) \end{aligned}$$

$$\leq \tau(ch^2 + D\tau)$$

$$= \frac{\tau}{12} \|\partial_{xx}^4 u\|_{L^\infty} h^2 + \frac{\tau}{2} \|\partial_t^2 u\|_{L^\infty} \tau$$

$$\leq \max \left\{ \frac{\tau}{12} \|\partial_{xx}^4 u\|_{L^\infty} ; \frac{\tau}{2} \|\partial_t^2 u\|_{L^\infty} \right\} (h^2 + \tau)$$

$$= \underbrace{\frac{\tau}{2} \max \left\{ \frac{\|\partial_{xx}^4 u\|_{L^\infty}}{6} ; \|\partial_t^2 u\|_{L^\infty} \right\}}_{=: C(\mu; \tau)} (h^2 + \tau)$$

Ainsi, en passant au max sur les j , il vient,

$$\max_{j \in [0, M+1]} \|e^j\|_\infty \leq C(\mu; \tau)(h^2 + \tau)$$

7
↳ Par conséquent, le schéma est convergent pour la norme $\|\cdot\|_0$, à l'ordre 1 en temps, et à l'ordre 2 en espace.

CQFD